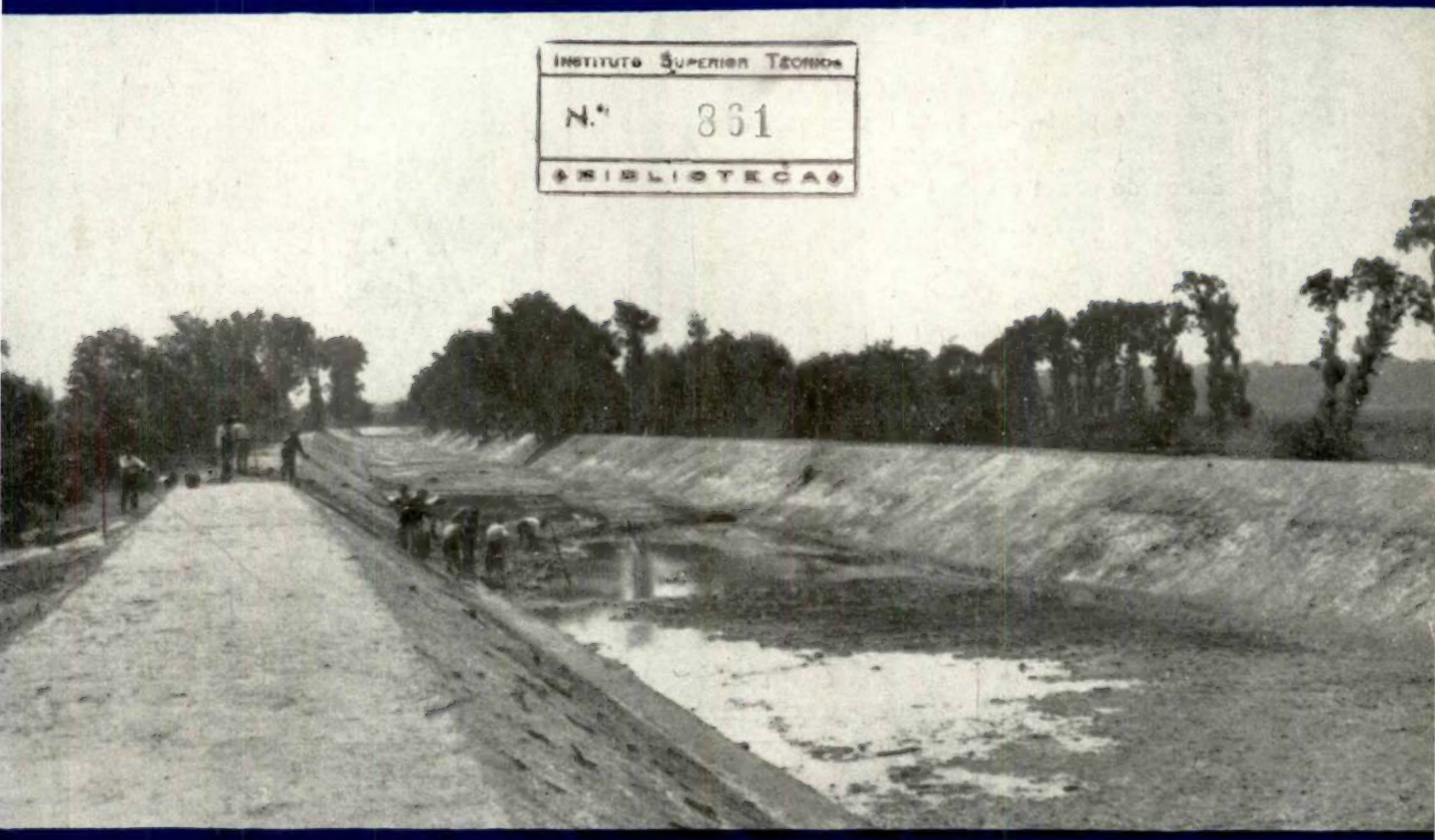
TÉCNICA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
N.º 861
BIBLIOTECA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 141-Novembro-1943

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

SEDE
Rua Duque de Loulé, 240 — Pôrto
Telef. 2828 - 2829 — 2830 — Est. 90

DELEGAÇÃO
R. António Maria Cardoso, 13, 2.º-Lisboa
Telefones 27232 — 27233 Est. 365

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU LEIRIA e de SETÚBAL, pela mais extensa rêde de alta tensão em Portugal (mais de 1.200 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LOGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a **U. E. P.** e consumir a sua energia é **proveitoso negócio**

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
141
Novembro — 1943

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N./ TEL. 49144 (linha 50)

BIBLIOTECA I.S.T.
BIBLIOTECA I.S.T.

DIRECTOR
JOSÉ DE LUCENA
ADMINISTRADOR
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
BIBLIOTECÁRIO
ANTÓNIO BUSTORFF
CORPO REDACTORIAL
Eduardo de Abreu Nunes
Jorge Trigo Mira
Manuel dos Santos Rézio
António da Silva Salta
Luíz Pinto Elyseu

NÚMERO AVULSO 6$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	16$00	30$00	58$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	40$00	70$00
Estrangeiro.....	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Desobstrução do rio Lis — Direcção Geral dos Serviços Hidráulicos e Eléctricos.

		Págs.
A estática do solo e a sua aplicação ao cálculo das fundações	Eng.º Dr. Edgar Schultze	499
Acção do amoníaco e do cloro sôbre os materiais das instalações de cloragem das águas de abastecimento	Eng.º Luís Veiga da Cunha	518
Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs	Eng.º Civil Manuel Rocha	521
Fiscalização de obras públicas	Eng.º Civil Horácio de Moura	535
Inovações na construção suíça de máquinas-ferramentas	Prof. Eng.º E. Mettler	554
Do Mundo Técnico		557
Bibliografia		559
Publicações recebidas		560

STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
SCHWAN
Bleistift-Fabrik A-G.
NÜRNBERG
Lápis de desenho
em 18 graduações 7 B — 9 H
Lápis de côr
O utensílio precioso em 24 côres
Novidade: STABILO Cellomin D. R. P.
O lápis-tinta com a mina especial
resistente às influências climáticas
Representante:
A. Ferreira da Silva, Pôrto.
Rua Alexandre Braga, 82. Tel. 6132

BIBLIOTECA B.T.

MATERIAL SUÍÇO DE PRECISÃO

EXPOSIÇÃO DA INDÚSTRIA SUÍÇA EM LISBOA

Instituto Superior Técnico, Out.°-Nov.° 1943

Recomendamos uma visita a esta valiosa Exposição, onde figuram algumas das casas seguintes, das quais somos Representantes, Agentes, ou Revendedores autorizados:

S. A. Henri WILD, Heerburgg — Aparelhos geodésicos, topográficos, fotogramétricos e militares.

A. J. AMSLER, Schaffhouse — Planímetros. Máquinas para ensaio de materiais. Instrumentos hidrométricos.

MERIDIAN S. A., Bienne — Instrumentos para agrimensura.

A. SCHILD S. A., Grenchen — «Punaises» especiais Assa.

Pierre ROCH, Rolle — Ferramentas de medida.

SIEGRIST & Co., Stein — Material de desenho e topográfico.

Arthur UTZ, Berne — Aparelhos para Gabinetes de Física.

HÄNNI & Co., Jegenstorf — Manómetros, termómetros e outros instrumentos industriais de medição.

James JAQUET S. A., Bâle — Cronómetros, conta-segundos, taquímetros e análogos.

A. ATTENHOFER, Zurich — Material para esquiadores.

Com prazer daremos aos nossos Clientes e Amigos, por pessoal especializado, informações sôbre a fabricação das firmas supra e sôbre TODOS OS INSTRUMENTOS DE PRECISÃO SUIÇOS.

Rua Eugénio dos Santos, 75 — LISBOA — Telef. 2 4314/15

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

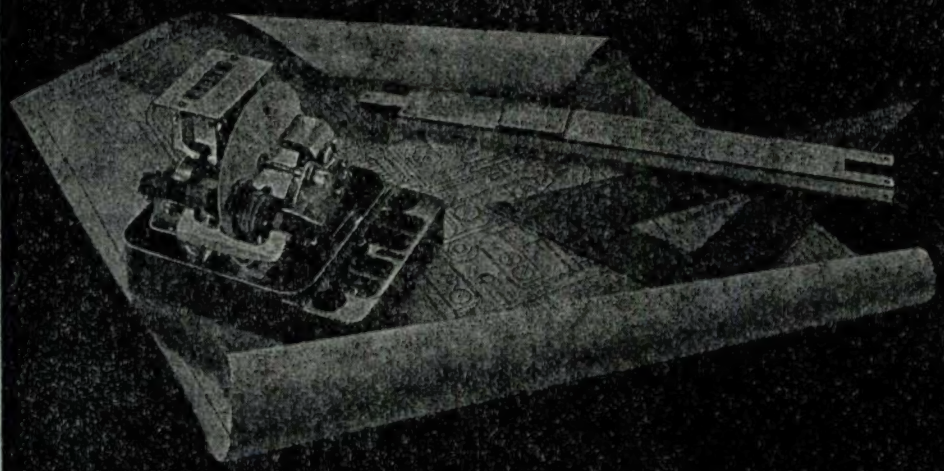
É digno de uma visita o STAND

LANDIS & GYR

na Exposição Suiça

Contadores electricos para todos os generos de corrente
Contadores eléctricos para tarifas especiais
Contadores auto-vendedores
Contadores registadores de máxima
„Maxigraph" e „Printo-Maxigraph"
Interruptores horários e relógios,
Installações para medições e comando e distância
Contadores padrão e installações para aferição de contadores
Installações centrais de relógios eléctricos „INDUCTA"
Termóstatos e installações automáticas para a regulação da temperatura

Materiais de alto valôr, engenhosa construcção e esmerado fabrico, garantem a qualidade dos nossos produtos

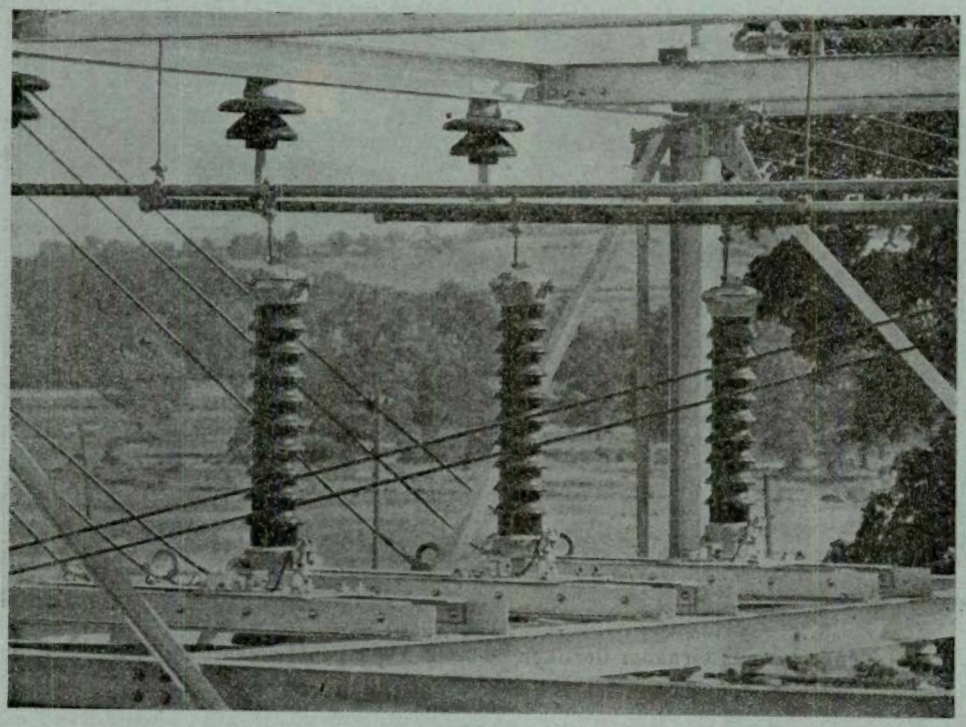


LANDIS & GYR S.A. ZUG (SUISSA)

Representantes JAYME DA COSTA. L.DA **LISBOA — PÔRTO**

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Aparelhos de protecção «THYRITE» contra sobretensões

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

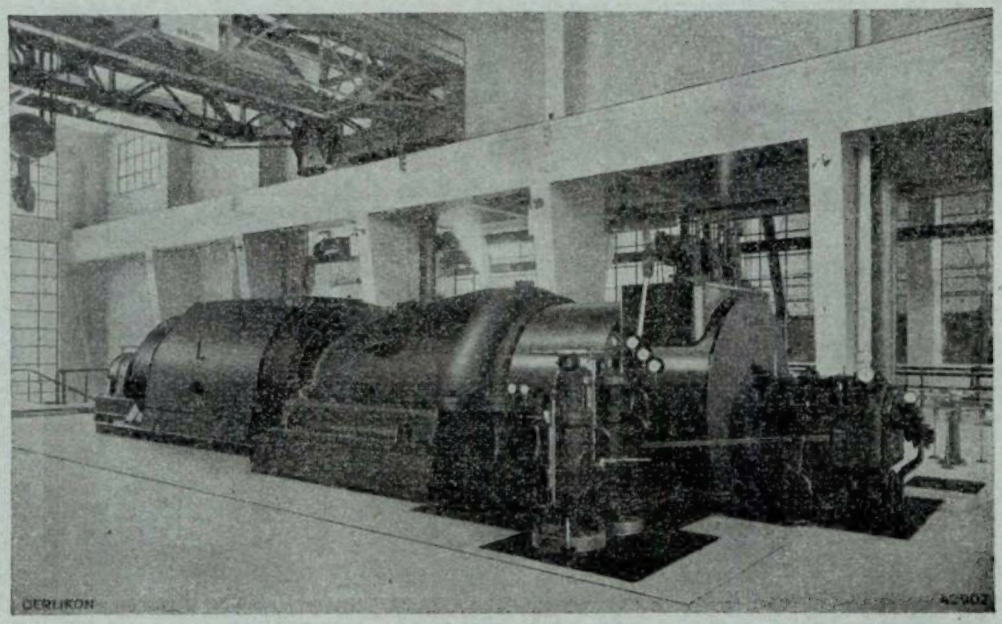
THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

OERLIKON



Grupo turbo-alternador Oerlikon de 30000 kW e ponte rolante de 74 t. da Central de Hameenlinna (Filândia)

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos para centrais termo e hidro-eléctricas, subestações e instalações de distribuïção. Geradores e motores eléctricos de todos os tipos, transformadores, reguladores de indução, grupos convertidores, mutadores, turbinas a vapor e turbo geradores, gruas eléctricas, interruptores e aparelhos de manobra para alta e baixa tensão, aparelhos de protecção e relais de todos os tipos, equipamentos para soldadura eléctrica por arco, compressores e bombas de vácuo, electrolisadores, equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras eléctricas e diesel-eléctricas (via estreita e normal), tramwais, troley-buses, funiculares, teleféricos, etc.

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Pôrto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.° // Telefone 968

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON
ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

TÉCNICA

JOSÉ DE LUCENA
DIRECTOR

ANO XIX - N.º 141 NOVEMBRO 1943

A ESTÁTICA DO SOLO E A SUA APLICAÇÃO AO CÁLCULO DAS FUNDAÇÕES

PELO ENG.º DR. EDGAR SCHULTZE
Professor do Instituto Superior Técnico de Berlim

É com muito prazer que a «Técnica» publica o artigo do Sr. Prof. Edgar Schultze, que apresenta um notável interêsse para todos os que assistiram à sua brilhante conferência e dum modo geral interessa fundamentalmente à Engenharia Civil.

I — Introdução

As considerações feitas a seguir, relacionam-se com o tema duma conferência que realizei no Instituto Superior Técnico de Lisboa, no dia 17 de Maio de 1943, a convite da Associação dos Estudantes. Dado que o texto integral da conferência há-de ser publicado na *Revista da Faculdade de Engenharia,* do Pôrto, juntamente com os de duas outras conferências que fiz no Pôrto, ocupar-me-ei aqui de sugestões suscitadas nas inúmeras discussões que, durante a minha permanência em Portugal, tive com os meus colegas portugueses, e procurarei esclarecer, com suas vantagens e inconvenientes, os processos de cálculo de fundações hoje empregados, segundo os actuais conhecimentos da mecânica e da estática do solo.

II — Tipos de fundações e sua aplicação

As condições particulares dos vários países exigem diversidade na construção de fundações. Em parte, êste facto resulta da circunstância de que a composição de um terreno faz considerável diferença da de outro, e, em parte, dos materiais de construção de que o engenheiro dispõe para execução das suas obras. Assim, as fundações maciças, por exemplo, impuseram-se em escala particularmente elevada numa grande parte da Europa, porque o solo firme se encontra a pequena profundidade, e existem pedras, cimento e areia grossa em grandes quantidades. Nos países com grande produção de aço, tem-se, pelo contrário, passado nos últimos dois decénios a construir muros de cais, contrafortes e outras obras semelhantes, com emprêgo sempre crescente de aço, utilizando principalmente as estacas-prancha. Dado que na Alemanha, sobretudo nas regiões costeiras, as camadas resistentes só se encontram a maiores profundidades, dá-se aqui também muitas vezes preferência ao sistema de construção de plataforma em grelhas sôbre estacas, relegando-se cada vez mais para segundo plano o sistema de cons-

trução maciça. Verificam-se, portanto, diferenças características entre Portugal e a Alemanha, sem que, contudo, isso queira dizer que em qualquer dos dois países se empregue exclusivamente um ou outro sistema de construção. Tal como em Portugal existem ainda outras construções além dos muros de cais maciços, assim na Alemanha também se encontram muros de construção maciça, além de estacas-prancha e de plataformas em grelhas sôbre estacas.

Visto que cada um dêstes sistemas de construção exige um processo especial de cálculo, cada um dos países dedicou-se de preferência ao estudo e desenvolvimento dos cálculos necessários para as construções mais usuais.

Enquanto em Portugal se encontra um estudo altamente desenvolvido do impulso activo sôbre muros maciços [1], procedeu-se na Alemanha, nos últimos anos, ao estudo de processos de cálculo rigoroso de estacas-prancha e de plataformas em grelhas sôbre estacas. Uma comparação entre os diversos processos actua proveitosamente sôbre o progressivo aperfeiçoamento dos estudos de estática do solo. Muitos ensinamentos se podem transportar de um para outro sistema de construção, obtendo-se aperfeiçoamentos.

III — Cálculo das construções maciças

As obras maciças constituem o mais antigo sistema de construção de alicerces, tendo, por isso, fornecido a principal razão para o estudo das fôrças que, de facto, actuam sôbre as fundações. Sòmente depois de se ter chegado a determinados resultados nestas construções, é que se puderam resolver os problemas bastante mais difíceis que se apresentam nas modernas construções de estacas-prancha e de plataformas em grelhas sôbre estacas.

Nas construções maciças somos obrigados a estabelecer diferenças entre dois grupos de fôrças: a pressão lateral que a terra e a água exercem sôbre uma fundação ou um muro de suporte, e a pressão vertical que estas construções transmitem ao solo.

a) *Impulso activo e resistência passiva sôbre muros*

No cálculo do impulso activo e da resistência passiva, parte-se, desde Coulomb, do princípio que houve uma ruptura do terreno por detrás do muro. Êste facto leva à formação de uma superfície de escorregamento no terreno. Inicialmente admitiu-se esta superfície de escorregamento como plana (Fig. 1a). As fôrças que ali influem são: o pêso do prisma de impulso G, a fôrça de atrito na superfície de escorregamento Q, inclinada sôbre a superfície de escorregamento segundo o ângulo de atrito interno ϱ, e a pressão activa E, inclinada sôbre o muro, segundo um ângulo δ, de atrito entre o maciço e o suporte. Conhecendo a inclinação da superfície de escorregamento ϑ, é possível calcular com a maior facilidade a fôrça E. A superfície de escorregamento ϑ será determinada de maneira que dê, como resultado, o valor máximo de E.

Estudos posteriores demonstraram que, na realidade, a superfície de escorregamento não é plana, mas sim curva. Todavia, as diferenças determinadas por esta inexactidão não influem tanto, em geral, no valor do impulso activo que tornem inaplicável o resultado dos cálculos. Há, porem, casos, em que a admissão de superfícies planas de escorregamento conduz a resultados insuficientes, como, por exemplo, na determinação da resistência passiva. Neste caso podem obter-se resultados mais exactos se se utilizar uma superfície circular para o cálculo. Para uma parede vertical e terreno horizontal, Krey [2] estabeleceu uma tabela de impulsos activos, com cujo auxílio hoje se calcula na Alemanha a resistência passiva. Esta é mais pequena do que nas superfícies planas de escorregamento, segundo Coulomb, de maneira que se pode exprimir melhor com ela a segurança existente na construção do que antigamente.

---

[1] Correia de Araújo — «Estudo dos maciços terrosos e dos seus suportes». Pôrto, 1942.

[2] Krey (H.) «Erddruck, Erdwiderstand», Berlim, 1936.

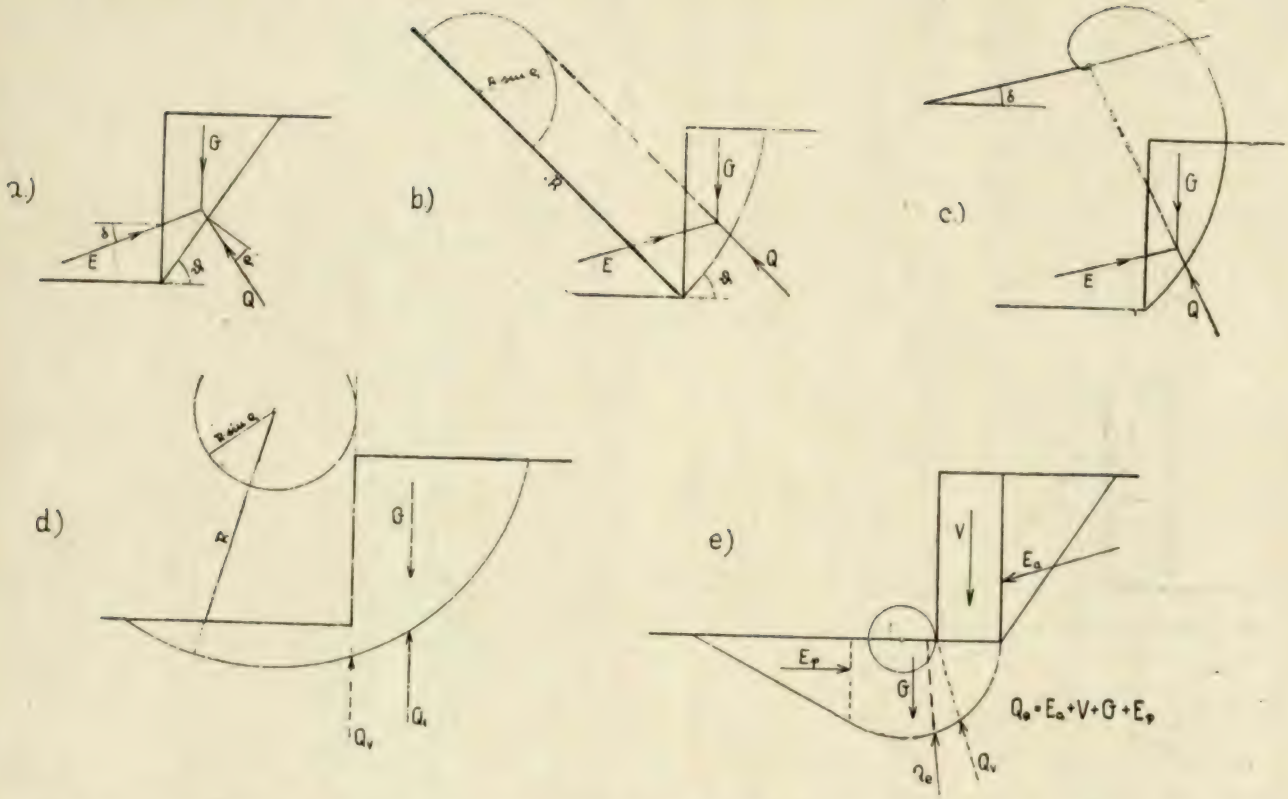


Fig. 1. Formas de curvas de escorregamento e fôrças incidentes: *a*) Recta no caso do impulso activo; *b*) Círculo no caso do impulso activo; *c*) Espiral logarítmica no caso do impulso activo; *d*) Círculo no caso de escorregamentos da construção e do terreno (ruptura do terreno de fundação); *e*) Círculo com tangente no caso de ruptura no solo por debaixo da fundação (escorregamento por movimento de conjunto do terreno de fundação).

Fôrças: G = pêso do prisma de impulso; V = pêso próprio da parede; Q = coeficiente de fricção sôbre a superfície de escorregamento; $Q_a = Q$ existente; $Q_e = Q$ necessário; E = impulso activo; E_a = impulso activo; E_p = impulso passivo; ρ = ângulo de atrito interno do solo; δ = ângulo de atrito entre o maciço e o suporte.

Para o estabelecimento da sua teoria, Coulomb partiu do princípio de que o muro é uma estrutura rígida rodando em volta do seu ponto de apoio (Fig. 2). A dedução tem ainda hoje validade para estas condições. Todavia, observações mais rigorosas sôbre o estado de tensão das partículas de terra infinitamente pequenas, demonstraram que a pressão activa também é, neste caso, produzida por superfícies curvas de escorregamento, podendo chegar até a ser superior em cêrca de 10 % ao valor de Coulomb. Estas observações foram levadas a efeito por Résal, Caquot e Jaky ([3]). Résal e Caquot publicaram tabelas de impulsos activos, com que é possível fazer um cálculo mais exacto dos valores. Desempenha aqui um papel especial o ângulo de atrito δ entre o maciço e o suporte, que foi livremente escolhido por Coulomb e levou a contradições na composição das fôrças G, Q e E. Das condições de equilíbrio da partícula infinitamente pequena, deduz-se forçosamente, segundo as novas teorias, um determinado ângulo de atrito entre o maciço e o suporte. É, todavia, condição essencial que a superfície posterior do muro seja tão áspera que entre ela e o solo existam as mesma condições de atrito que entre terra e terra. De resto, as teorias de Résal, Caquot e Jaky partem do princípio de que uma parte do solo pode ser substituída por um muro, sem alteração das tensões existentes no solo. De facto, isto é

([3]) Jaky (J.) — «La théorie classique de la poussée des terres, compte tenue de la paroi de soutènement». «Mémoires de l'Association International des Ponts et Charpentes», volume V (1937-1938), pág. 187.

possível num grande número de casos, especialmente quando os muros são rígidos e não muito lisos.

Uma hipótese preliminar comum a tôdas as teorias antigas e modernas até agora citadas, é que as tensões do terreno e, com elas, também o impulso activo aumentam rectilìneamente de cima para baixo. Esta condição dá-se apenas quando o muro roda

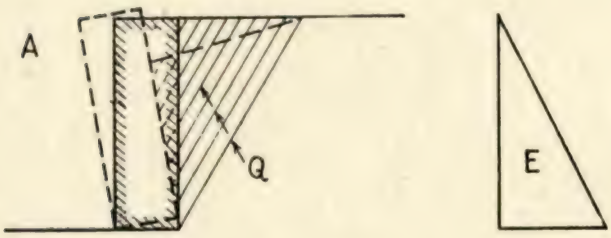


Fig. 2. Superfícies de escorregamento e distribuïção do impulso activo no caso de deslocamento *A* de um muro rígido (Rotação em volta do sopé).

em volta da sua base (Fig. 2). Maiores diferenças do que entre Coulomb e Caquot se encontram, porém, quando o muro não roda em volta da base, mas sim da sua aresta superior (Fig. 3). Êste caso verifica-se em obras como os estivamentos de galerias de minas, contrafortes e estacas-prancha fixadas na parte superior. Em tais casos deve-se contar com superfícies de escorregamento

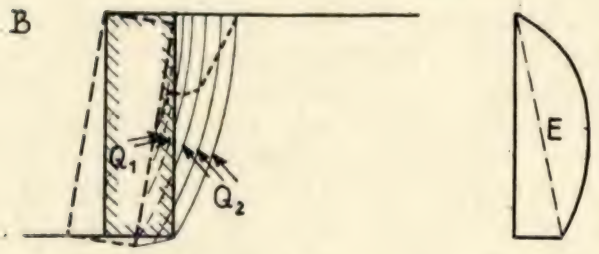


Fig. 3. Superfícies de escorregamento e distribuïção do impulso activo no caso de deslocamento *B* de um muro rígido (Rotação em volta da aresta superior).

que são melhor representadas aproximadamente por círculos (Fig. 1 b). Chegou-se à forma dêstes por meio de observações na própria construção, por modelos experimentais e por estudos cinemáticos. Aqui figura Ohde em primeiro plano, estabelecendo as bases para o cálculo ([4]). Outros autores como L. Rendulic ([5] [6]) propõem, como curva de escorregamento, uma espiral logarítmica, que tem a vantagem de a fôrça *Q* passa sempre pelo polo de espiral (Fig. 1 c). Dado, porém, que o objectivo de qualquer cálculo é conseguir um processo utilizável com elementos tão simples quanto possível, o círculo, com raras excepções, impôs-se mais do que a espiral.

No cálculo do impulso activo sôbre um muro que gira em volta da sua aresta superior (movimento *B* da parede, em oposição ao movimento *A* da parede, em que ela roda em volta da sua base), Ohde localiza o centro do círculo de escorregamento na altura da aresta superior da parede (Fig. 4). O ângulo φ de abertura do círculo deve ser determinado tomando por base diversas condições. Para êsse fim é necessário determinar primeiramente, com precisão, o ponto de incidência da fôrça *Q*. Conhecendo exactamente a forma da superfície de escorregamento, existe uma fórmula diferencial de Kötter, com cujo auxílio é imediatamente possível determinar a distribuïção da fôrça *Q* ao longo da superfície de escorregamento. Esta fórmula pode também aplicar-se ao círculo, não obstante ela ser apenas uma aproximação e não dar a linha exacta de escorregamento. Quando *Q* e *G* estão determinadas, pode-se então fixar exactamente a posição da fôrça *E*. Escolhendo primeiramente um qualquer ângulo de abertura de círculo, obtém-se para a fôrça *E* um determinado ângulo de atrito entre o maciço e o suporte. Se, pelo contrário, êste ângulo de atrito entre o maciço e o suporte fôr fixado por efeito de condições exteriores, como, por exemplo, pela aspereza da parede, consegue-se então determinar por tentativas o ângulo de abertura do círculo.

Querendo proceder com maior exactidão, não se escolhe para a distribuïção de *Q* a

---

([4]) Ohde (J.)—«Zur Theorie des Erddrucks unter besonderer Berücksichtigung der Erddruckverteilung». Bautechnik 1938, págs. 150, 176, 241, 331, 450, 570, 753.

([5]) Rendulic (L.) — «Gleitflächen, Prüfflächen und Erddruck». Bautechnik 1940, pág. 146.

([6]) Rendulic (L.) — «Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit». Bauingenieur 1935, pág. 230.

lei de Kötter, que não tem completa validade para curvas de aproximação, mas sim uma parábola com um parâmetro inicialmente desconhecido. Esta incógnita pode ser determinada, estabelecendo a condição de que o impulso activo a um dado ângulo de atrito entre o maciço e o suporte atinja o valor máximo que seja possível obter. Esta é a mesma condição que Coulomb estabeleceu para a escolha da superfície rectilínea determinante de escorregamento.

Na escolha da linha de distribuïção de Q pode-se, porém, ainda ir mais adiante e escolher uma parábola de grau superior, com o expoente n a um parâmetro. Isto tem a vantagem de que, para a determinação das demais incógnitas n, se pode introduzir a condição de que o esfôrço do impulso activo e a tensão da fôrça de atrito q na base da parede, sejam postas em concordância uma com a outra. Segundo a lei da elipse de tensões, e e q, não são independentes uma da outra. Sempre que um dêstes valores é conhecido, também o outro o será.

Os resultados a que Ohde chegou conduzem a que a pressão activa resultante do pêso próprio deixou de se distribuir por forma triangular, mas sim por forma parabólica, e é cêrca de 15 a 20 $^0/_0$ maior do que segundo Coulomb. A sua resultante E também deixa de actuar, como nas teorias de Coulomb, Résal e Caquot, no terço inferior da parede, mas sim apreciàvelmente mais acima, aproximadamente a meio da parede. Em virtude da dificuldade do cálculo, ainda se não estabeleceram tabelas do impulso activo para o movimento B da parede.

O impulso activo exercido por uma carga uniformemente repartida obtém-se pelo mesmo processo. A sua lei de distribuïção assemelha-se à da pressão de equilíbrio, segundo Boussinesq, mais abaixo descrito. A ordenada máxima está situada na aresta superior do solo. Com o aumento de profundidade, o impulso activo deminue, pouco mais ou menos, parabòlicamente. No total, é cêrca de 20 $^0/_0$ maior do que segundo Coulomb.

Embora seja justificado admitir, na maioria dos casos, como determinam o impulso activo que se produz no caso de ruptura do solo, há porém, situações de carga em que se não deve partir desta ruptura do solo. Isto pode acontecer quando o muro fôr impedido de executar o necessário movimento provocador da ruptura. Porque, antes que sobrevenha a ruptura, isto é, a formação de superfícies de escorregamento, a construção deve executar um movimento, na verdade, tão pequeno que na maioria dos casos, pode ter lugar sem dificuldades. Só os solos argilosos muito plásticos têm a propriedade de permitir que êste movimento adquira uma importância que não pode ser admitida. Quando tivermos que trabalhar com paredes apoiadas em cima e em baixo, como acontece em túneis, canais subterrâneos, descarregadores de albufeiras, silos, etc., então é absolutamente retirada às paredes tôda a possibilidade de escorregamento lateral. Mas também nas construções que não são apoiadas em cima e se encontram em bons solos fixos, podem sobrevir condições que impeçam um cálculo da pressão activa

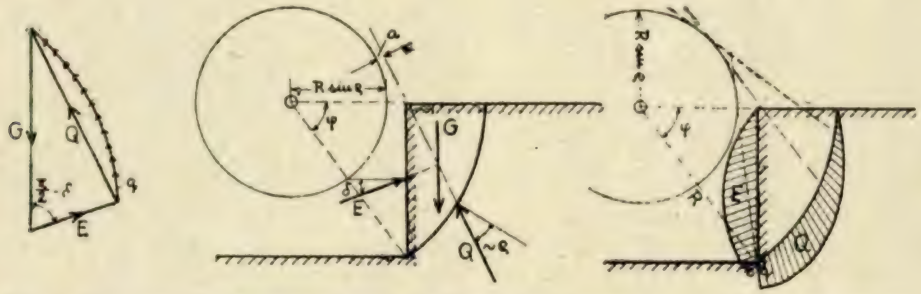


Fig. 4. Cálculo do impulso activo no caso de curva de escorregamento de forma circular.

baseada no estado de ruptura do solo. Tratando-se, por exemplo, de um muro de suporte na frente de um grande bloco fechado de construção (Fig. 5), não se pode considerar êste último como uma vulgar sobrecarga sôbre a superfície do solo. Segundo a teoria da ruptura, de uma sobrecarga escorrega sempre apenas aquela parte que está sôbre o prisma de escorregamento.

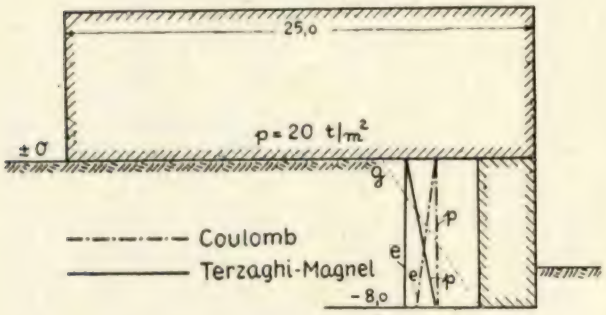


Fig. 5. Cálculo do impulso activo para o estado de repouso (Terzaghi-Magnel) e para o estado de ruptura (Coulomb), no caso de uma parede de suporte para uma grande construção.
e = impulso activo total, donde p = impulso activo de sobrecarga; g = superfície de escorregamento.

Êste facto é, sem dúvida, possível, quando se trate de sobrecargas divisíveis, como, por exemplo, em casos de aglomerações de pessoas Um grande bloco de construção não é, porém, divisível, não podendo por isso ceder o movimento, no caso de escorregamento do prisma de impulso. Tratando-se, portanto, de sobrecargas de grande extensão e de grande rigidez, não se formará provàvelmente qualquer curva de escorregamento do impulso activo, desde que a pressão activa do pêso próprio do solo possa ser absorvida sòmente pelo muro. Em tais casos toma-se de preferência, por base de cálculos o impulso activo existente antes de sobrevir o estado de ruptura. Êste atinge um valor consideràvelmente maior do que na ruptura. Ainda não existem, até hoje, cálculos perfeitos para a determinação do valor da chamada pressão de equilíbrio do pêso próprio e da sobrecarga. Para a sobrecarga faz-se, porém, uso, como método aproximado, da distribuïção da tensão no corpo semi-indefinido, segundo Boussinesq e Fröhlich (7), embora ela não tenha sido inicialmente estudada para êste fim. Trata-se aqui da distribuïção das tensões num corpo semi-indefinido, isto é, numa massa de solo horizontal e limitada. Quando se aplicam estas regras ao espaço que se encontra por detrás da construção, parte-se então de novo e tàcitamente do princípio de que a construção tem as mesmas características elásticas que o solo do corpo semi-indefinido que ela substitue. A admissibilidade desta hipótese só pode ser verificada por meio de observações e medições. As poucas observações de que até agora se dispõe, provaram que a distribuïção, diminuindo de cima para baixo, do impulso activo proveniente da sobrecarga, que se obtém por esta forma, coincide aproximadamente com a teoria (8). Isto ainda não se averiguou em relação ao valor e à direcção do impulso activo. Todavia, enquanto se não dispuser de qualquer outro processo melhor, não se pode deixar de fazer uso dêste método, tanto mais que Magnel (9) e Sarmento (10) estabeleceram tabelas muito úteis. É verdade que nesta hipótese pode muito bem acontecer que as componentes vertical e horizontal do impulso activo sôbre o muro, façam uma com a outra um ângulo maior do que o ângulo de atrito interno do solo, não se podendo por conseqüência, formar.

O impulso activo proveniente do pêso próprio calcula-se, no presente caso, segundo Terzaghi, com um coeficiente de pressão activa de 0,40 a 0,45 para areia compacta, 0,45 a 0.50 para areia sôlta, e 0,60 a 0,75 para argila. A distribuïção desta pressão de equilíbrio é de forma triangular.

---

(7) Fröhlich (O.) — «Druckverteilung im Baugrunde», Wien 1934.

Ohde (J.) — «Zur Theorie de Druckverteilung im Baugrunde». Bauingenieur 1939, pág. 451.

(8) Streit (J.) — «Zur Frage des Erddrucks aus Kurzstreckenlasten». Bautechnik 1942, pág. 86.

(9) Magnel (G.) — «Stabilité des constructions», vol. III

(10) Sarmento (J. A. Ribeiro) — «Impulso produzido sôbre um muro de suporte, por cargas concentradas em terra pleno horizontal». «Revista da Faculdade de Engenharia do Pôrto», vol. VIII (1942) n.º 4, pág. 167.

b) *A segurança contra escorregamento*

Mesmo quando a construção está bem calculada contra o impulso activo, ainda se pode formar uma fenda de ruptura por debaixo da construção, sôbre a qual ela escorrega juntamente com o terreno adjacente. É, por isso, indispensável examinar-lhe a segurança contra escorregamento, com o auxílio de círculos de escorregamento ([2]), ou espirais ([6]), segundo a Fig. 1 d. Para isso estabelece-se a relação dos momentos entre o pêso próprio das massas deslizantes, a pressão da água e as pressões do atrito na periferia da curva de escorregamento. O centro e o raio do círculo, respectivamente o polo da espiral, têm que ser determinados por tentativas, até se achar a curva de escorregamento mais perigosa. Neste caso, a espiral fornece valores um pouco mais desfavoráveis que o círculo. Novas investigações mostraram que o centro mais desfavorável do círculo, em terrenos uniformes e com construções verticais, se encontra à distância R sen φ da vertical. O mesmo tem validade para taludes, onde esta distância se mede a partir do centro do talude. Na espiral logarítmica, o polo está situado por cima da aresta vertical anterior do muro, ou por cima do centro do talude ([11]). O coeficiente de segurança necessário varia entre 1,1 e 1,3, conforme a exactidão com que forem determinadas as fôrças actuantes e conforme o cuidado com que tiverem sido prèviamente estudadas as características do terreno. Justamente sôbre o problema da segurança com que se deve contar na estática do solo ainda há grandes divergências de opinião, que foram postas, há pouco tempo, em confronto num trabalho muito elucidativo ([12]).

c) *A estabilidade à rotação*

As construções maciças podem fazer movimentos de rotação, girando em volta das suas arestas inferiores. Todavia, também pode acontecer que durante a rotação se formem fendas no solo que, juntamente com o pêso da construção, favoreçam um escorregamento. Enquanto que o primeiro género de estabilidade à rotação já existe, devido ao facto de que — por causa das tensões do solo por debaixo da construção — a resultante das fôrças actuantes nunca passa através da aresta inferior anterior do muro (Fig. 6), não necessitando, por isso, de ser

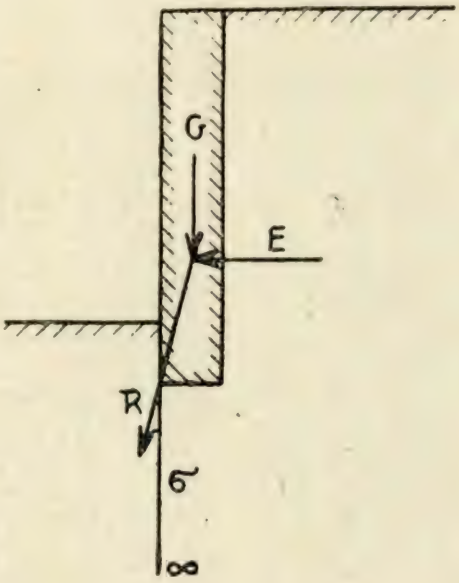


Fig. 6. Estabilidade de rotação e compressão do solo. Passando a resultante R pelo ponto anterior do sopé da parede, a estabilidade de rotação é *1*, ao passo que a tensão do solo σ é infinitamente grande.

especialmente estudada, também pode sobrevir a formação de linhas de escorregamento no solo, quando a resultante fique no interior da secção do muro (Fig. 7). Também neste caso se dão novamente diversas possibilidades para a formação de curvas de escorregamento.

d) *A pressão da fundação sôbre o solo*

Para o cálculo das tensões que se verificam no terreno por debaixo da fundação, utiliza-se até agora, nos corpos maciços, exclusivamente o diagrama trapezoidal das

([11]) Ohde (J.) — Einfache erdstatische Berechnungen der Standsicherheit von Böschungen.» Deutsche Wasserwirtschaft, 1942, pág 282.

([12]) Leussink — «Der Sicherheitsgrad im Grund- und Erdbau.» Bautechnik, 1942, pág. 297.

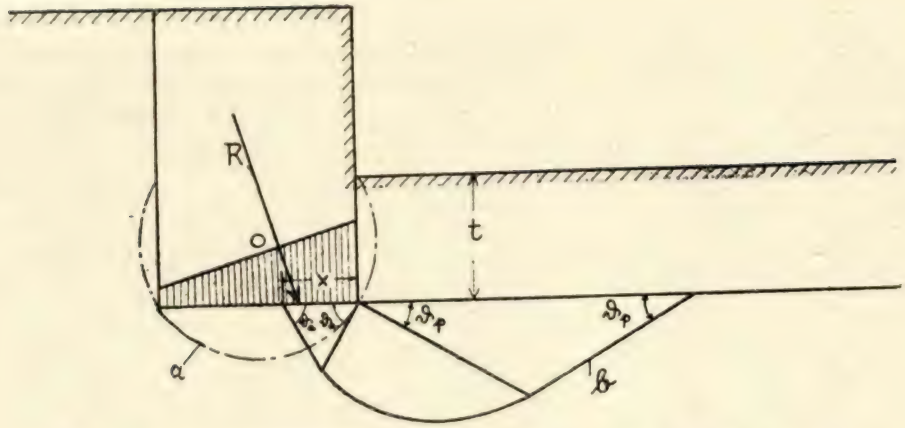


Fig. 7. Curvas de escorregamento que podem sobrevir na rotação de um muro: p = distribuïção de pressões segundo o diagrama trapezoidal de pressões, em conseqüência da resultante R das fôrças exteriores; t = profundidade da fundação do muro; υ_a = ângulo de escorregamento do impulso activo; υ_p = ângulo de escorregamento da resistência passiva; a = círculo de escorregamento segundo Krey; b = espiral logarítmica segundo Prandtl-Buisman; x = início mais desvantajoso da curva de escorregamento.

pressões (Fig. 8), cuja aplicação é conhecida. Quando a resultante fica no têrço médio do maciço da construção, apenas sobrevêm

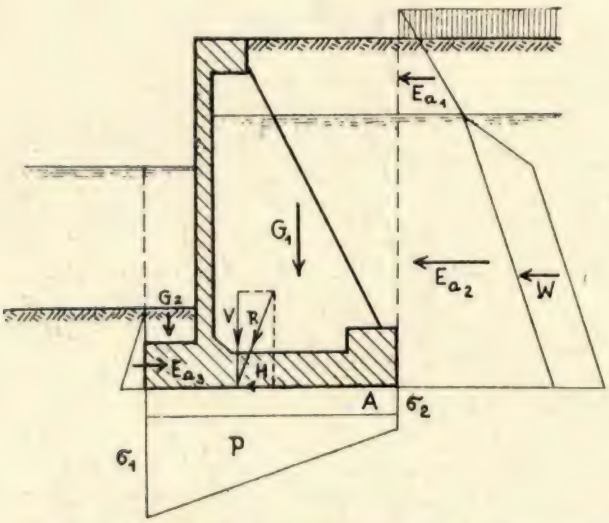


Fig. 8. Distribuïção da compressão do solo por debaixo de uma parede de suporte, segundo o diagrama trapezoidal das pressões:
G = pêso do terreno; A = sub-pressão da água; P = pressão do terreno de fundação; E_a = impulso activo; W = pressão da água; V = resultante vertical; H = resultante horizontal; R = resultante total; σ = tensão nas fendas das fundações.

tensões de compressão. O esfôrço máximo de compressão na borda da construção não deve ultrapassar a pressão máxima admissível sôbre o solo.

O diagrama trapezoidal das pressões é apenas uma aproximação para as fôrças que se verificam no solo. Todavia, apesar das consideráveis diferenças que, na verdade, podem sobrevir, é suficiente para construir com segurança segundo os conhecimentos adquiridos na prática. As coisas passam-se, porém, de outra maneira, quando a construção não é qualquer corpo rígido, mas sim uma placa mais ou menos elástica. Neste caso é vulgar, em vez de utilizar o diagrama trapezoidal das pressões, proceder ao cálculo com auxílio do factor de compressibilidade do solo, que nos diz ser a deformação da fundação proporcionalmente igual, em qualquer ponto, à pressão sob a mesma. Os cálculos com o factor de compressibilidade do solo fazem-se, com relativa rapidez e simplicidade, com auxílio das linhas de influência de Magnel ([9]), sempre que se trata de corpos com momento de inércia constante. É, porém, muito freqüente as fundações não terem secção uniforme, apresentando, pelo contrário, variados momentos de inércia. Em tais casos utiliza-se de preferência o processo gráfico, avaliando primeiramente a distribuïção da pressão sôbre o solo, possìvelmente pelo diagrama trapezoidal das pressões (Fig. 10). Com esta distribuïção p_1 inicial, podem-se desenhar as curvas dos momentos M_1 na fundação, e depois a linha elástica y_1, tendo em consideração os diferentes mo-

mentos de inércia J. Multiplicando a ordenada elástica y_1 pelo factor de compressibilidade C, e colocando ao mesmo tempo o eixo horizontal de maneira que o valor da superfície p_2 seja igual à superfície do dia-

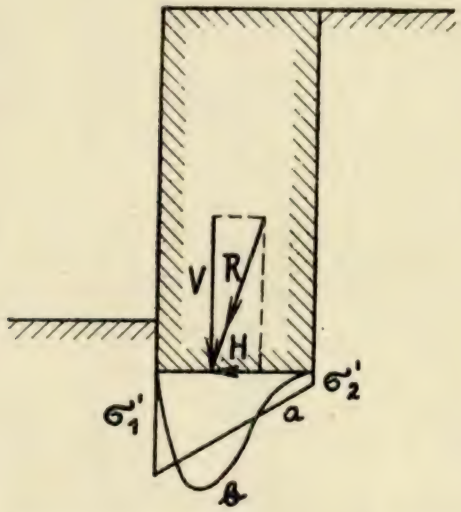


Fig. 9. Distribuïção da pressão do terreno de fundação por debaixo de uma construção maciça: *a*) Aproximação segundo o diagrama trapezoidal das pressões; *b*) Distribuïção verdadeira.

grama trapezoidal inicial de pressões p_1, obtém-se uma nova curva de distribuïção p_2 para a pressão da fundação sôbre o solo. Esta distribuïção n_2 afastar-se-á da hipótese inicial p_1 do diagrama trapezoidal de pressões. A operação tem que ser começada, entrando-se com uma segunda hipótese sôbre a distribuïção das pressões no solo, que se obtém por intermédio do diagrama trapezoidal inicial de pressões p_1 e da distribuïção de pressões p_2 dêle deduzida. Em determinadas circunstâncias é necessária uma repetição múltipla da operação, até se encontrar uma concordância entre o valor tomado para a distribuïção da pressão sôbre o solo p_1 e a mesma distribuïção p_2 determinada por intermédio da elástica y_1. A Fig 10 mostra que já a primeira distribuïção melhorada da pressão sôbre o solo p_2 desloca as maiores cargas da borda para o centro da construção. Em geral, o primeiro resultado p_2 representa já uma melhoria em relação ao diagrama trapezoidal de pressões p_1.

O processo com o coeficiente de compressibilidade tem o inconveniente de não representar nenhuma constante do solo, não podendo, por isso, ser determinado com segurança. As observações da mecânica do

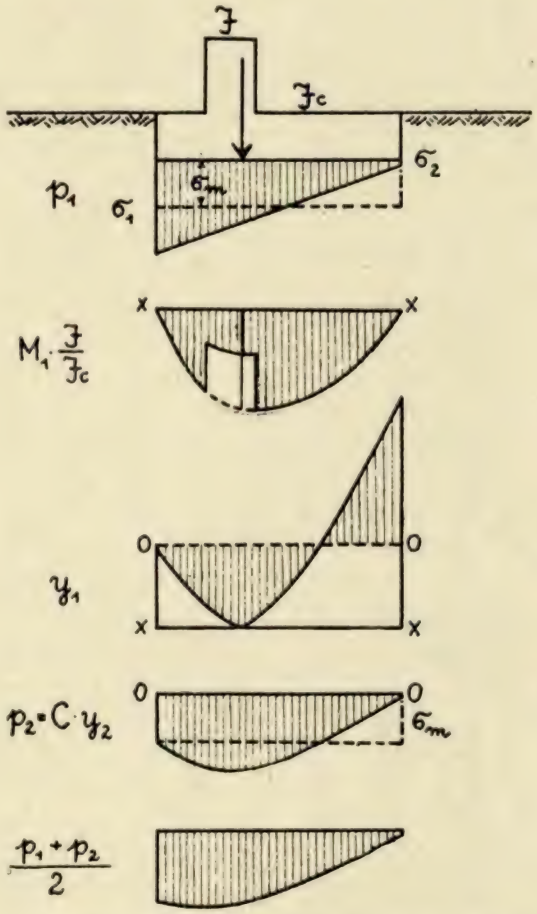


Fig. 10. Determinação gráfica da pressão do terreno de fundação, com auxílio do factor de compressibilidade, no caso do momento de inércia da fundação ser variável.
J, J_c = Momentos de inércia da secção; σ = tensões do solo segundo o diagrama trapezoidal das pressões; p_1 = primeira hipótese da distribuïção da compressão do solo; M_1 = momento resultante da carga exterior e de p_1; y_1 = elástica resultante da carga exterior e de p_1; p_2 = pressão do terreno de fundação calculada da elástica y_1; C = factor de compressibilidade; $(p_1 + p_2)/2$ = segunda hipótese da distribuïção da pressão do terreno de fundação.

solo mostraram que o terreno possui uma elasticidade E, que se pode determinar experimentalmente, mas nenhum coeficiente de compressibilidade. A diferença entre os dois consiste em que a elasticidade E do solo, está para o coeficiente de compres-

sibilidade C, numa relação expressa pela fórmula:

$$E = Cl$$

em que l representa a espessura da camada de terra. Sendo E constante, o coeficiente de compressibilidade C varia com a espessura da camada e com a parte do solo apanhada pela carga. Em conseqüência disso levantaram-se, há muito, objecções ao emprêgo do processo do coeficiente de compressibilidade, sem que, até há pouco tempo, fôsse possível empregar qualquer outro melhor em seu lugar.

Só recentemente é que Ohde [13] conseguiu elaborar um outro sistema de cálculo, em que já se não trabalha com o coeficiente de compressibilidade C, mas sim com a elasticidade constante E do solo.

Para isso desenha-se primeiramente a linha dos assentamentos, que ocasiona uma carga de superfície uniformemente distribuída, de dilatação a limitada (Fig. 11 c). Esta linha pode ser determinada por cálculo pelo processo Fröhlich, ou por valores realmente observados. A linha total de assentamentos (Fig. 11 b) por baixo da construção, que é dividida em várias pequenas cargas uniformemente distribuídas ao longo de superfícies rectangulares, deduz-se pela sobreposição das diversas cargas das secções q. Os centros das várias zonas de carga são considerados como apoio Q de uma viga contínua (Fig. 11 e). Esta viga pode ser calculada pelas fórmulas dos três momentos de Clapeyron para os apoios de contrafortes; obtêm-se assim as diversas cargas de assentamento, isto é, o valor das várias pequenas cargas uniformemente distribuídas ao longo das superfícies rectangulares, e estas podem ser distribuídas com uniformidade por tôda a viga (Fig. 11 d). Êste processo fornece resultados apreciàvelmente mais exactos do que o processo dos factores de compressibilidade. É verdade que o trabalho de cálculo é bastante maior em virtude da necessidade de resolver um grande número de equações; não pode ser simplificado por meio de tabelas no género das de Magnel. Recomenda-se, porém, fazer uso dêste género de

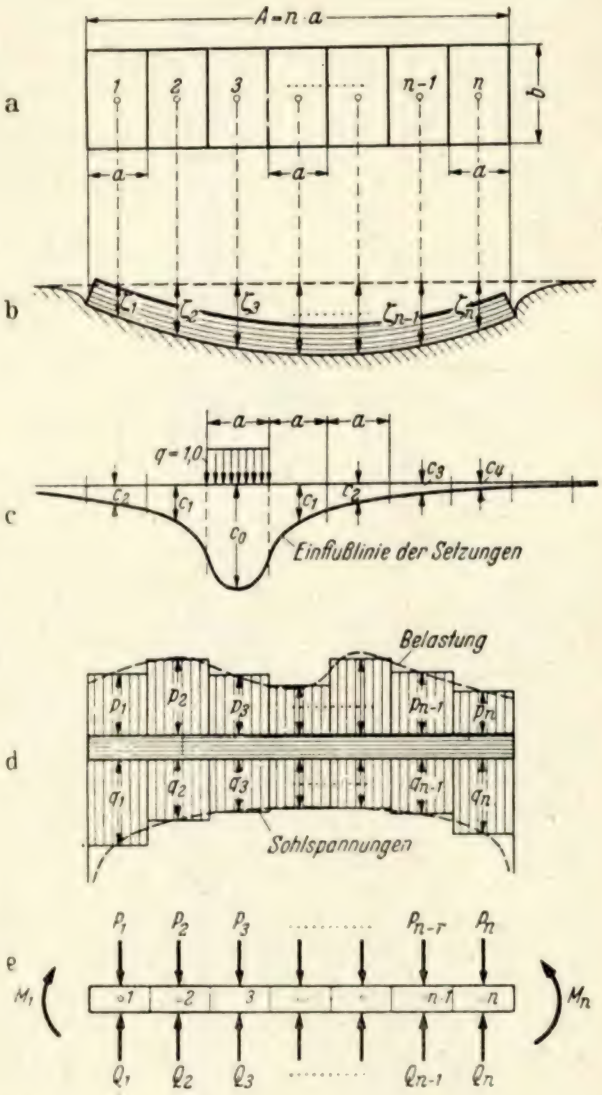


Fig. 11. Processo mais rigoroso para determinação da distribuïção de pressões sôbre o solo por debaixo de construções, segundo Ohde (conforme a revista «Bauingenieur», 1942, pág. 103).

a) Planta da fundação; comprimento A e largura b; *b*) assentamentos da fundação; *c*) assentamentos c do solo, em conseqüência de carga por meio de uma superfície parcial $a \cdot b$ da fundação, com a pressão $q = 1$ (linha de influência dos assentamentos); *d*) verdadeira tensão do solo q e pressão exterior existente da construção p; *e*) substituïção do sistema *d* por uma viga sôbre vários apoios elásticos Q, que são submetidos a esforços por cargas isoladas P conhecidas. Por aqui se calculam as fôrças Q sôbre os apoios. A elasticidade dos apoios obtém-se de *c* e *b*.

[13] Ohde (J.) — «Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern». Bauingenieur, 1942, págs. 99, 117.

cálculo, especialmente no caso de grandes construções, como, por exemplo, docas sêcas, dado o aumento de trabalho de cálculo é compensado pela economia de materiais. De-resto, isto é assim para todos os processos novos, que muitas vezes são mais difíceis de manusear do que os simples cálculos antigos. Lançar-se-á sempre mão dêles quando se trate de obras de elevado custo, enquanto que nas construções ligeiras e pequenas se deve manter o processo simples e trabalhar com maiores coeficientes de segurança.

e) *Pressões admissíveis nos terrenos de fundações por debaixo de colunas e de paredes*

Quando se calculam colunas maciças ou paredes pelo diagrama trapezoidal de pressões, ou pelo processo de Ohde, fica sempre em aberto a pregunta àcêrca do valor que se deve arbitrar à pressão admissível sôbre o terreno de fundação. A-pesar dos manuais e dos regulamentos de diversos países indicarem valores orientativos para essa pressão,

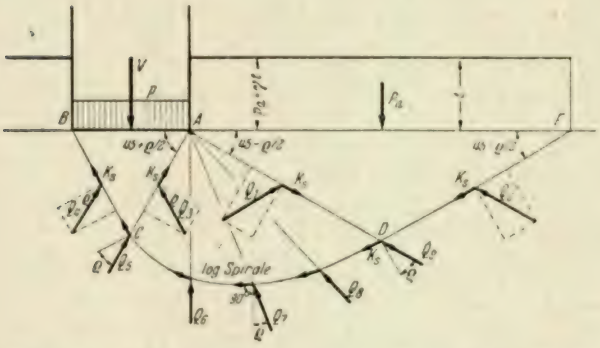


Fig. 12 Superfícies de escorregamento para determinação da capacidade de resistência do solo.

estes, porém, só têm validade para os casos normais. Querendo determinar as pressões sôbre o terreno de fundação por debaixo das colunas com preponderância de carga vertical, ou sôbre muros com preponderância de carga horizontal, lança-se novamente mão do desenho de superfícies de escorregamento (Fig. 12 e 1 e). Dado que, no caso de colunas, o pêso próprio do solo no interior do ângulo de escorregamento desempenha apenas um papel mínimo em relação à sobrecarga da construção, e, por isso, pode ser posto de parte, as superfícies de escorregamento, neste caso, podem ser determinadas desde o princípio com relativa exactidão. Segundo Prandtl ([14]), obtém-se como curva de escorregamento uma recta sob o ângulo $45 + \varrho \cdot 2$, a que se anexa uma espiral logarítmica. Não é necessário executar de novo em cada caso a construção das superfícies de escorregamento, como acontece nas paredes sobrecarregadas horizontalmente (Fig. 1 e), pois as observações levaram a fórmulas que permitem determinar sem dificuldade a carga admissível p, para dados característicos do solo. Além de Prandtl e de Buisman, Fröhlich ([15]), Maag ([16]), Rankine, Caquot e outros ([1]), também deduziram fórmulas semelhantes. É verdade que são consideràvelmente diferentes os valores das constantes com que os autores entram nestas fórmulas, em conseqüência das diferenças nas hipóteses e na elaboração do cálculo. A-pesar disso, os resultados fornecem, em análise crítica, uma referência para a ordem de grandeza das cargas admissíveis.

Investigações dêste género servem principalmente para o caso em que a construção corre riscos devidos a rupturas no solo. Isto dá-se, sobretudo, nos terrenos sem coesão (pulverulentos). Nos terrenos coesos (compactos) não se produz, na maioria dos casos, primeiramente a formação de superfícies de escorregamento, sobrevindo, pelo contrário, prèviamente, tão grandes assentamentos da construção, que *estes* determinam o valor das tensões admissíveis. Em tais casos é, portanto, indispensável proceder a um cálculo de assentamento segundo as regras de Terzaghi ([17]), e verificar se os assentamentos determinados estão dentro dos limites admissíveis. Deve aqui fazer-se notar que

([14]) Prandtl — «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», 1921, n.º 1. Veja também Buisman — «Grondmechanica Delft», 1940.

([15]) Fröhlich (O.) — «Druckverteilung im Baugrunde». Wien, 1934.

([16]) Maag — «Grenzbelastung des Baugrundes». «Erdbaukurs der E. T. H.», Zurique, 1938.

([17]) Terzaghi-Fröhlich — «Théorie du tassement des couches argileuses», Paris, 1939.

justamente os cálculos de assentamento se fundam em vastas simplificações, em relação às condições existentes na natureza, podendo, por isso, divergir consideràvelmente dos assentamentos que ocorrem posteriormente. A sua avaliação deve, por isso, fazer-se com o maior cuidado.

IV — O cálculo de construção de plataformas em grelha sôbre estacas

As construções de plataformas em grelha sôbre estacas compõe-se na parte superior de uma construção constituída por uma parede inteiramente maciça, ou por uma parede de cimento armado. Estas construções eram empregadas antigamente quando o solo consistente se encontrava a grande profundidade, para ser directamente atingido por uma parede maciça. Além disso, empregam-se hoje também as construções de plataformas em grelha sôbre estacas, quando o solo bom chega até à superfície da terra. Consegue-se assim considerável economia de grandes massas de cimento, em comparação com as paredes maciças,

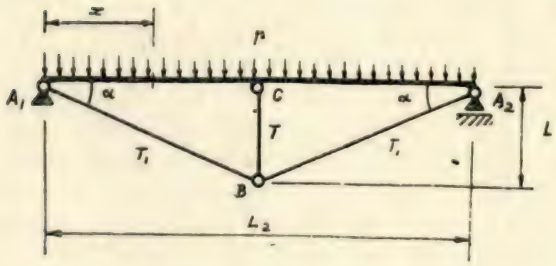


Fig. 13. Formação do efeito de grelha por debaixo de uma placa, no caso de linha recta de escorregamento. As setas indicam o sentido das fôrças de atrito na linha de escorregamentos.

evitando-se principalmente o oneroso abastecimento de água para a edificação da construção. Nos antigos tempos em que as estacas eram sòmente feitas de madeira, não era possível em conseqüência da moleza do material, cravá-las através de uma camada mais consistente de areia. Sòmente com a invenção da injecção de estacas e, sobretudo, com a introdução das estacas de aço, passou a ser possível introduzir estacas de grandes comprimentos, mesmo em terrenos oferecendo grande resistência. A seguir considerar-se-ão principalmente paredes sôbre altas plataformas em grelha sôbre estacas, que tenham de estar sujeitas sobretudo a fôrças horizontais de pressão da terra e da água. Nas colunas, contrafortes e fundações de edifícios, o cálculo simplifica-se em virtude da predominância de fôrças verticais. Não se tràtará pormenorizadamente das chamadas grelhas baixas de estacas, compostas por uma alta parede e estacas curtas. O seu emprêgo diminuíu hoje consideràvelmente. Além disso, o seu cálculo não envolve quaisquer dificuldades especiais, dado que é suficiente dividir as tensões do solo proporcionalmente pelas estacas, por debaixo da construção maciça (Fig. 9).

a) *Pressão activa sôbre a construção e a estaca-prancha*

Como forma normal de uma alta construção em plataforma em grelha sôbre estacas, considera-se uma construção por baixo da qual se encontra uma série de estacas, protegidas do lado das águas por uma estaca-prancha (Fig. 14). A pressão activa que se exerce sôbre uma tal parede, será, portanto, suportada em parte pela construção, e em parte pela estaca-prancha, e transmitida à cabeça das estacas pela placa da plataforma em grelha sôbre estacas. O cálculo da pressão activa sôbre a construção não faz diferença dos processos que são empregados para o movimento *A* da parede nos muros maciços. No cálculo da pressão activa sôbre a estaca-prancha, deve tomar-se em consideração o efeito de grelha da plataforma, o qual provoca uma diminuïção. A melhor maneira de se imaginar êste efeito de grelha é numa parede maciça que tenha uma placa saliente na parte superior (Fig 13). Pressupondo superfícies planas de escorregamento, cria-se uma trajectória de curva de escorregamento, cuja uniformidade é prejudicada pela placa sa-

liente. Por conseqüência, a pressão activa sôbre a estaca-prancha será nula directamente sob a placa, começando então a aumentar progressivamente até ao valor total que existiria sem a placa (Fig. 14). Êste valor total é aproximadamente atingido no ponto em que a curva de escorregamento corta a estaca-prancha através do ponto mais recuado da plataforma. Isto não significa, porém, que a parte da pressão activa designada por F desapareça completamente. Lançando a superfície de escorregamento através da extremidade superior da mais recuada estaca de tracção, a pressão activa total no seu ponto de intercessão com o eixo

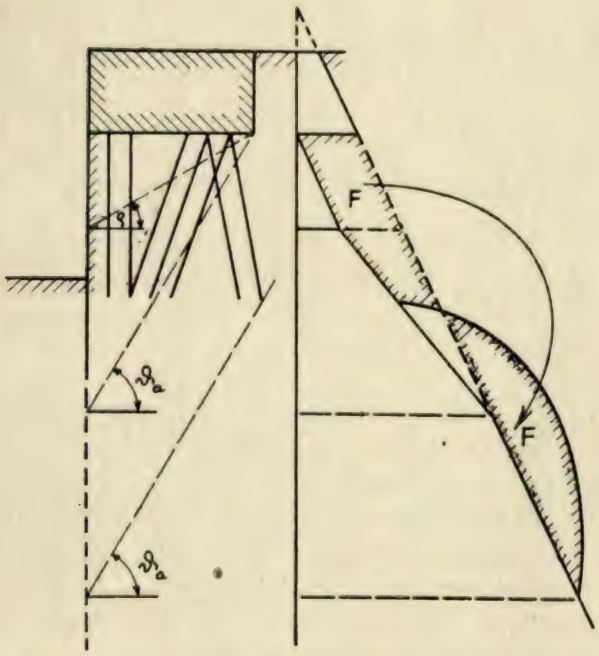


Fig. 14. Distribuição da pressão activa sôbre uma estaca-prancha, em frente de uma construção alta em grelha sôbre estacas.
ρ = ângulo de atrito interno do solo; ϑ_a = ângulo de escorregamento da pressão activa.

da estaca-prancha deve ser tão grande como se não existisse qualquer construção de plataforma em grelha sôbre estacas. Abstraia-se do pequeno aumento de pêso do prisma de impulso provocado pelo betão da construção. Isto significa que a superfície F, que existe em pequena parcela na parte superior, deve ser novamente adicionada na parte inferior. Podemos figurar-nos a formação dêste aumento, partindo de que a carga que as estacas transmitem ao solo aumenta a pressão activa na parte inferior da estaca-prancha. Na maioria dos casos, porém, êste aumento está localizado tão fundo que sòmente actua por debaixo do sopé da estaca-prancha, sôbre o eixo tracejado da mesma estaca-prancha. Existe, portanto, de facto, um alívio de carga da pressão activa sôbre a construção.

b) *Processo aproximativo, segundo Culmann*

O principal problema no cálculo de uma construção de plataforma em grelha sôbre estacas consiste em determinar as fôrças que as várias estacas recebem. Estas fôrças têm que ser menores do que as cargas admissíveis nas estacas, cuja melhor forma de determinação é por um ensaio de carga. Na ver-

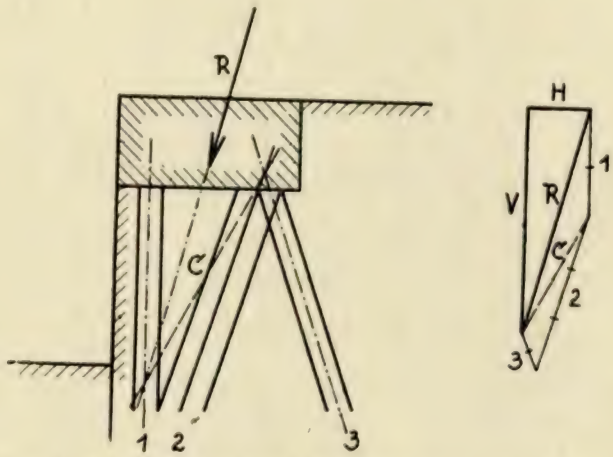


Fig. 15. Cálculo dos esforços das estacas por meio de desdobramento em três direcções, da resultante R das fôrças exteriores.

dade, existem fórmulas para o cálculo da carga admissível nas estacas, as quais se fundam na teoria da pressão activa, ou são deduzidas, sob a designação de fórmulas dinâmicas, do princípio do impulso elástico ao cravar. Ambos os grupos de fórmulas são, porém, de pouca confiança.

Dado que nas plataformas em grelha sôbre estacas se trata freqüentemente de sistemas em que as estacas são empregadas com três tipos de inclinações, quási que se

pode dividir a resultante das fôrças exteriores, segundo o conhecido processo de Culmann na mecânica, no sentido dos eixos das estacas 1, 2 e 3 (Fig. 15). As fôrças incidentes sôbre cada inclinação da estaca, são repartidas pelo número de estacas existentes. Obtêm-se assim em tôdas as direcções cargas iguais entre si em tôdas as estacas. O processo de Culmann tanto pode ser utilizado para recalcular sistemas de estacas já projectadas, como também para o projecto de uma adequada plataforma em grelha sôbre estacas.

c) *Processo mais rigoroso, segundo Nökkentved*

A hipótese de que as estacas orientadas numa direcção são tôdas submetidas a cargas iguais é a condição fundamental do processo de Culmann. Esta condição é, todavia, sòmente satisfeita quando a construção da plataforma em grelha sôbre estacas se desloca paralelamente a si mesma. Em geral, êste não é, porém, o caso, dando-se, pelo contrário, também uma rotação da construção em virtude da acção de fôrças exterioriores, que podem ocasionar consideráveis diferenças das fôrças até agora iguais em estacas paralelas. Não se chega, por isso, a um cálculo exacto da plataforma em grelha sôbre estacas, sem tomar em consideração a mudança de comprimento das estacas. Para êste fim, o sistema estático de Nökkentved ([18]) é simplificado no sentido da construção e o terreno por debaixo das pontas das estacas serem considerados como absolutamente rígidos, de maneira que as estacas são o único elemento elástico (Fig. 16) São ligadas por articulações em cima e em baixo e circundadas de ar. Embora esta simplificação pareça, de princípio, um pouco forçada, consegue-se todavia demonstrar que ela exerce só muito pouca influência sôbre o cálculo estático. Além disso, pode-se também levar em conta a inconsistência do solo e o envolvimento das estacas com terra, pela introdução de um comprimento variável de estacas, e a fixação das estacas na plataforma e no solo pela adição imaginária de estacas ideais. A construção deve, todavia, ser executada de maneira que actue como corpo rígido. Caso contrário o cálculo será muito mais complicado.

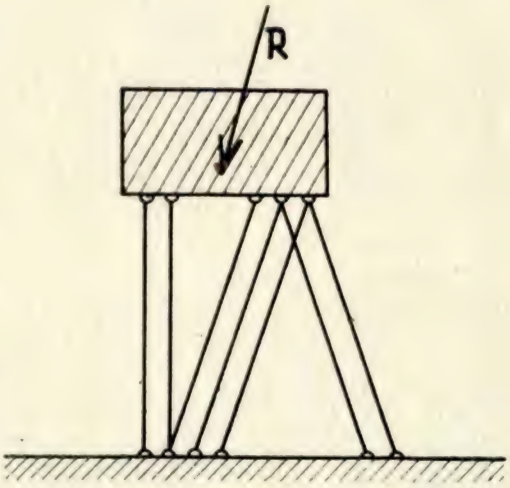


Fig. 16. Sistema para o cálculo de uma plataforma em grelha sôbre estacas como construção estàticamente indeterminada.

O processo de Nökkentved resolve-se por meio de tabelas sem grande número de operações. Tem apenas a desvantagem de poder ser sòmente empregado para recalcular os sistemas de estacas já projectadas, mas não para projectos novos. No entanto, já se descobriram recentemente novos processos ([19]) para esta última aplicação.

V — O cálculo das estacas-prancha

As estacas-prancha são executadas na maioria dos casos de maneira que a sua base se apoie contra o solo, existindo um encastramento na parte superior da parede. Estacas-prancha sem encastramento só se encontram em caso de pequena altura, pois em caso contrário são submetidas a grandes esforços. Além da parede com encastra-

([18]) Nökkentved — «Berechnung von Pfahlrosten», Berlim, 1928.

([19]) Schleicher — «Taschenbuch für Bauingenieure», Berlim, 1943, pág. 840.

mento simples, encontram-se paredes com encastramento múltiplo, especialmente nos escoramentos de minas. No caso especial dos açudes, a estaca-prancha anterior chega mesmo a ser encastrada elàsticamente, em virtude da flexibilidade da parede posterior.

a) *Pressão activa e oxcilação da parede*

No estudo da pressão activa sôbre as estacas-prancha, basta limitarmo-nos às paredes com encastramento simples. Contràriamente aos muros rígidos até agora considerados, trata-se, neste caso, de uma construção que se verga (oscilação da parede *C*) sob a carga da pressão activa e da pressão da água. Deixam de existir as condições preestabelecidas por Coulomb. Pode, porém, aplicar-se a distribuïção da pressão activa sôbre os casos até agora considerados. Na parte inferior da estaca-prancha existe uma oscilação da parede *A*, e, na parte superior, uma outra *B*. Conjugando uma com a outra as distribuïções das pressões activas para elas determinadas (Figs. 2 e 4), obtém-se para a estaca-prancha uma linha sinuosa, que apresenta, em cima e em baixo, um valor máximo da pressão activa. Para a determinação desta distribuïção, Ohde indicou um processo de cálculo por aproximação. Segundo êste, a resistência passiva serve de linha de limite para a altura h_1 (Fig. 17), e a pressão activa para a altura h_2. Entre as duas, procede-se à mão livre, a uma compensação na forma representada, que tem uma trajectória tal que não se altera a totalidade da superfície da pressão activa. Deve, porém, tomar-se em consideração que não se exerce sôbre a parede uma pressão activa da grandeza *ABC*, segundo Coulomb, mas sim que o valor total da pressão activa sofre um aumento de 10 %. Substituindo, portanto, o triângulo *ABC* por um rectângulo *ABED*, tem que se ampliar êste de 10 %, obtendo assim o rectângulo *ABGF*. As superfícies tracejadas da pressão activa, à direita e esquerda de *FG*, devem ser iguais. Ohde entra em cálculo com metade do valor da resistência passiva em frente do sopé da parede, obtendo assim a superfície de carga representada na figura 17.

Esta distribuïção tem, porém, apenas validade para a pressão activa do pêso próprio do terreno. No estudo da pressão activa

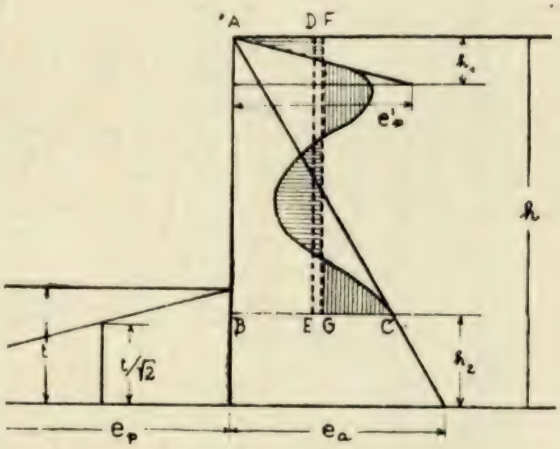


Fig. 17. Distribuïção do impulso activo sôbre uma estaca-prancha encastrada (deslocamento *C*).
λ_a = coeficiente de impulso activo, segundo Coulomb-Krey, no sentido $\delta_a = +\rho/2$; λ_p = coeficiente de resistência activa no sentido $\delta'_p = +\rho/2$; λ_p = coeficiente de resistência activa no sentido tang δ_p = — tang ρ . $(1 + 2 \tan g^2 \rho)$; δ = ângulo de atrito entre o maciço e o suporte; t = comprimento da ficha; e_a = impulso activo segundo Coulomb; e_p = resistência activa segundo Coulomb.

resultante da sobrecarga, verificou-se que ela se concentra fortemente na parte superior da parede (Fig. 18). Essa é a razão porque Ohde desenha o rectângulo que se obtém segundo o processo de Coulomb, apenas com 55 % do seu tamanho, e junta-lhe em substituïção um segundo rectângulo no trôço h_1, e de que o lado horizontal é 4,4 vezes maior do que segundo Coulomb. A superfície total de ambos os rectângulos é novamente 10 % maior do que segundo os antigos processos. A concentração da pressão activa na parte superior da parede só se dá com o valor indicado quando o tirante da parede não cede. No caso de grande flexibilidade, esta distribuïção transfere-se para a oscilação *A* da parede. Pelo contrário, produz-se finalmente a oscilação *B*, no caso de uma cedência do socalco da parede.

O novo cálculo da pressão activa, cujo emprêgo só é compensador em grandes

construções, apresenta, em comparação com a distribuïção segundo Coulomb, a importante diferença de que o maior momento de flexão é mais pequeno, e de que a tracção do tirante, pelo contrário, é consideràvelmente maior. Estes resultados estão em concordância com as observações da prática, segundo a qual às vezes os tirantes antigamente em estacas-prancha eram arrancados.

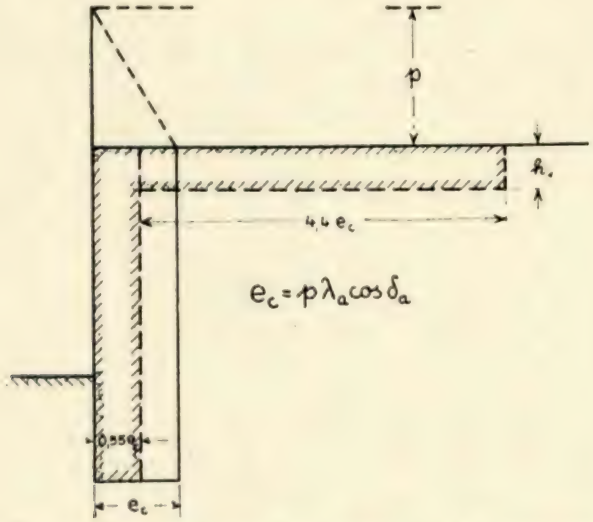


Fig. 18. Distribuïção do impulso activo de sobrecarga sôbre uma estaca-prancha encastrada.
e_c = coordenadas do impulso activo de sobrecarga, segundo Coulomb; p = sobrecarga; δ_a = ângulo de atrito entre o maciço e o suporte; h_1 = como na fig. 7; λ_a = coeficiente de impulso activo, segundo Coulomb-Krey.

b) *Parede assente livremente*

Segundo o comprimento que se dá à parte da estaca-prancha cravada no solo, está esta alojada livremente ou encastrada em baixo. No primeiro caso, obtêm-se maiores momentos e uma menor profundidade de cravamento do que no segundo. Entre ambos existe uma infinidade de transições: as paredes parcialmente encastradas. A profundidade do cravamento das paredes alojadas livremente pode ser calculada por uma fórmula de momentos tendo por centro o ponto A do tirante. Mais claro é, porém, o processo gráfico que, para efeitos de simplificação, está desenhado na figura 19 para uma distribuïção da pressão activa segundo Coulomb. Constrói-se a linha de momentos para a superfície de pressão desenhada, e acha-se a profundidade de cravamento, tirando uma tangente pelo ponto mais alto da linha de momentos, a qual vai cortar o eixo do tirante. Dêste ponto de intercessão tira-se uma segunda tangente à parte inferior da linha de momentos. O ponto de encontro é a aresta inferior da estaca-prancha.

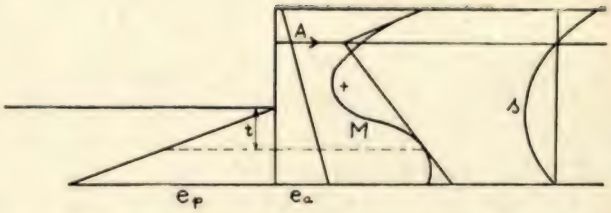


Fig. 19. Investigação gráfica de uma estaca-prancha fixada livremente no solo.
t = comprimento da ficha; A = tirante; M = curva de momentos; e_a = impulso activo; e_p = resistência activa; s = elástica.

c) *Parede encastrada inferiormente*

Na parede encastrada inferiormente, procede-se primeiramente da mesma maneira que na parede apoiada livremente, com a diferença de que o eixo inferior não é tan-

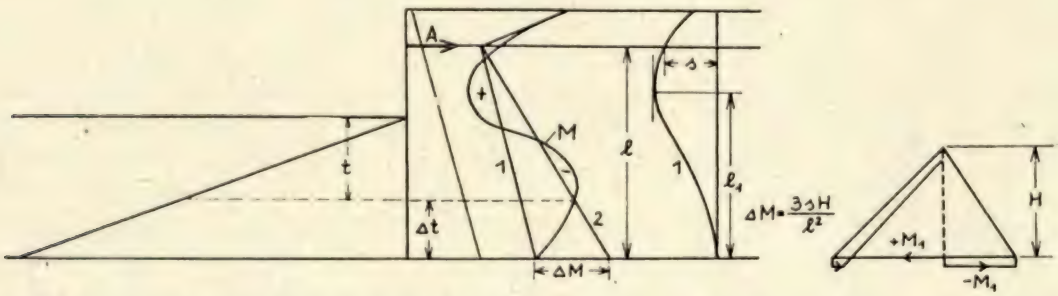


Fig. 20. Investigação gráfica de uma estaca-prancha cravada no solo. A = fôrça do tirante; M = momento de flexão; t = comprimento da ficha; s = deformação da curva de momentos l no ponto do tirante, no caso de cravação inferior; H = deslocamento horizontal do diagrama de fôrças para a elástica.

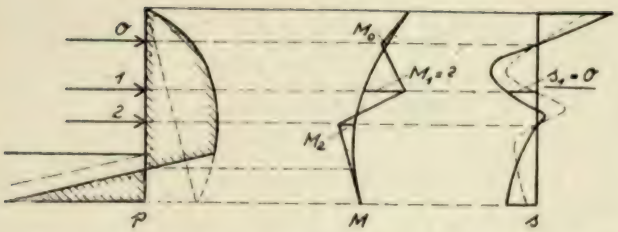


Fig. 21. Investigação estática de uma estaca-prancha escorada com minas. Distribuïção do impulso activo conforme a fig. 4:
p = superfície de carga; M = superfície de momentos; s = elástica. O comprimento da ficha é dado de tal maneira que a estaca-prancha assenta livremente em baixo.

gente à linha de momentos, mas sim corta-a duas vezes (Fig. 20). Tem que tomar-se primeiramente (eixo 1) o ponto inferior de intercessão (profundidade de cravamento). Desenha-se depois para a linha de momentos 1, a elástica 1, cujo eixo tem que lhe ser tangente por causa do encastramento no sopé da parede e cortá-la no ponto do tirante ([20]). Esta última condição não se dá, na maioria dos casos, na primeira tentativa. A elástica apresenta conseqüentemente um êrro s no ponto do tirante. Êste êrro corrige-se aplicando uma tracção suplementar do tirante, cujo valor é determinado pela condição de que ela provoca uma deformação s em sentido oposto, mas de igual valor. Na execução do cálculo isto faz-se simplesmente, bastando calcular em função do êrro s da elástica, o trôço M de que tem que ser deslocado suposto o eixo da linha de momentos 1 ([21]). Obtém-se então o verdadeiro eixo 2 da linha de momentos.

d) *Paredes com encastramento múltiplo*

Pode proceder-se segundo êste mesmo princípio também no caso de paredes mùltiplamente encastradas ([22]) (Fig. 21). Tratando-se, por exemplo, de um triplo escoramento de galerias de minas, desenha-se a curva de momentos e traça-se, no caso de paredes assentes em plano, uma tangente em cada um dos seus extremos. As tangentes cortam nos eixos de consistência 0 e 2, os momentos M_0 e M_2. O momento M_1 tem que ser novamente suposto de princípio. Desenhando a elástica obtém-se no ponto 1 uma deformação s_1, diferente de 0. Da condição $s_1 = 0$ obtém-se o valor exacto de M_1, podendo então desenhar-se a verdadeira elástica existente, tracejada na fig. 21. Não é, neste caso, absolutamente necessário proceder gràficamente ao estudo estático, que se pode também resolver pela pura via algébrica, no caso de superfícies de carga não muito complicadas. A profundidade de cravação em construções blindadas é dada por considerações construtivas e hidráulicas. Contràriamente às paredes de encastramento simples, esta pode ser tomada com qualquer valor arbitrário, dado que a estaca-prancha em apoios múltiplos se encontra em equilíbrio com qualquer comprimento de ficha.

Se o comprimento da ficha fôr tão grande que exista um encastramento parcial ou total no sopé da parede, também êste caso se pode igualmente considerar.

O processo aqui indicado é superior em exactidão e simplicidade à proposta de Magnel ([9]). Não representa qualquer aproximação, mas abrange rigorosamente tôdas as condições de apoio, e não falha mesmo no caso de diferentes camadas de terrenos e de qualquer distribuïção da pressão de água. Pode proceder-se de igual forma no caso de paredes encastradas em cima e no caso de deslocamentos do tirante.

e) *Reprêsas*

O emprêgo do processo de erros é um pouco mais complicado no caso de reprêsas (fig. 22). Tratando-se de uma secção, sobrecarregada por pressão de água, e composta por duas estacas-prancha com enchimento de terra, ligadas em dois pontos uma com a outra, ou escoradas recìprocamente, desenham-se primeiramente para cada uma das paredes 1 e 2 as superfícies de carga p da pressão activa e da pressão da água. Obtém-se a pressão activa interior sôbre a parede

([20]) Blum — «Einspannungsverhältnisse bei Bohlwerken», Berlim, 1931. Brennecke - Lohmeyer—«Der Grundbau», vol. 2, Berlim, 1930.

([21]) Hedde — «Beitrag zur Berechnung eingespannter Spundwände», Bautechnik, 1937, pág. 659.

([22]) Lackner — «Berechnung mehrfach gestützter Spundwände», Berlim, 1943, edição de V. Ernst und Sohn.

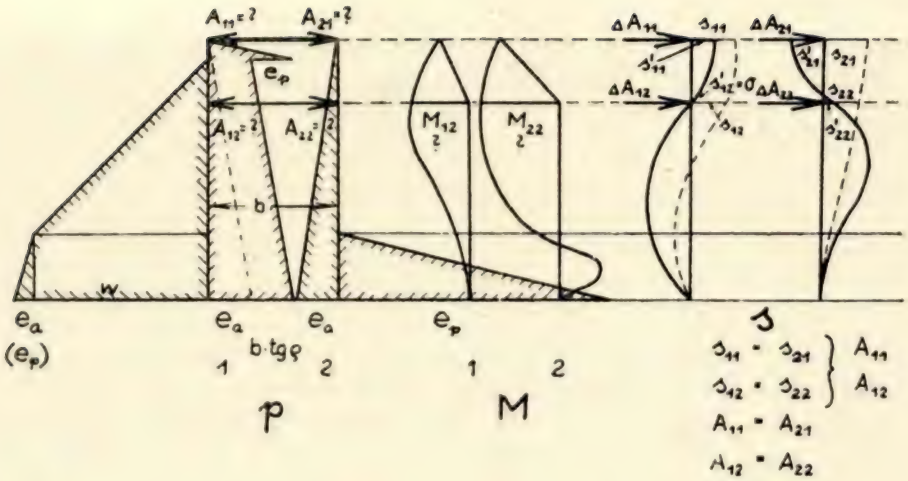


Fig. 22. Investigação estática de uma reprêsa com armação: p = superfícies de carga; λ_a = impulso activo (coeficiente de impulso activo); λ_p = impulso passivo (coeficiente de impulso passivo) segundo Coulomb-Krey; e_a = ordenada do impulso activo; w = ordenada da pressão da água; t_1, t_2 = comprimento da ficha de ambas as paredes; x, y = = ordenadas que têm que ser determinadas das condições de equilíbrio para as fôrças horizontais H e os momentos M; b = largura da reprêsa; γ = densidade do solo; ρ = = ângulo de atrito interno do solo; A_1, A_2 = fôrças do tirante; A_3 = sobrecarga sôbre o solo pela resistência activa na frente das paredes 1 e 2, valor máximo de $A_3 = E_p + + G tg\,\rho$, no caso de E_p = resistência activa na frente da parede $2 = \gamma\, t_2\, \lambda_p$ e $G = = b tg\, h$; h = altura da reprêsa.

M = superfícies dos momentos: M_{12} e M_{22} são supostos de princípio ($l.$ tentativa). s = elásticas: s_{11}, s_{21} = verdadeira deformação no tirante 1; s_{12}, s_{22} = idem no tirante 2; s_{1F}, s_{2F} = deformações no sopé da parede na primeira tentativa; A_{11}, A_{21} = fôrças de apoio de ambas as paredes no tirante 1; A_{12}, A_{22} = idem no tirante 2; linhas traçadas = = $l.$ tentativa; linhas ponteadas = elásticas definitivas.

1, aumentando, conforme Krey (2) o impulso activo E_a segundo Coulomb, do valor G tang ρ, sendo o pêso do enchimento da reprêsa $G = \gamma$ bh (h = altura, γ = pêso específico). Daqui resulta uma pressão activa composta pelo triângulo, segundo Coulomb, e por um rectângulo b tang ρ. Apenas na parte superior é que a carga passa a resistência passiva, sem que, contudo, se modifique o valor total da superfície.

Quando se desenha a curva de momentos, têm que se tomar por hipótese os momentos M_{12} e M_{22}. As elásticas correspondentes recebem então as deformações sujeitas a erros s'_{11}, s'_{12}, s'_{21} e s'_{22}. Os momentos desconhecidos M_{12} e M_{22} e com êles as desconhecidas fôrças sôbre os apoios A_{11} e A_{12}, calculam-se pelas fórmulas indicadas na figura 22. Para o caso dos tirantes ou escoras não sofrerem nenhuma mudança de comprimento, a deformação de ambas as paredes tem que ser igual nos pontos dos tirantes.

Além disso, as tracções recíprocas dos tirantes de ambas as paredes têm que ter igualmente o mesmo valor. Quando se entra nas fórmulas indicadas nas figuras com os valores das deformações, que se obtêm para a distribuïção dos momentos tomada por hipótese, podem então calcular-se os verdadeiros momentos e tracções dos tirantes. Por aqui se conclue que não é admissível considerar cada uma das estacas-prancha como um sistema fechado em si próprio, pois que, nesse caso, deixaria de se tomar em consideração que a parte superior da reprêsa é deslocada horizontalmente sob a acção da carga exterior.

VI — Conclusão

Os capítulos anteriores representam apenas um pequeno resumo do vasto campo da estática do solo, ainda em franca evolução. Qualquer estudo de projecto fornece oportu-

nidade de nos ocuparmos com problemas especiais, contìnuamente diferentes. Assim aparecem freqüentemente novas soluções, de maneira que, ao contrário do que acontece com a estática normal de construções, não se pode ainda dizer que a estática do solo constitua um campo fechado em si mesmo. Além disso, o terreno é um elemento de construção muito complexo, em comparação com os materiais de construção da estática normal. As suas características são determinadas pela mecânica do solo com exactidão sempre crescente. É de esperar que se adquiram aqui ainda muitos conhecimentos novos, que, por sua vez, levarão a modificações nos processos da estática do solo. Uma coisa, porém, se deve conservar sempre presente: fornecer ao engenheiro que estuda os projectos apenas processos que limitem tanto quanto possível os trabalhos de cálculo. Além disso, deve também partir-se do princípio de que são prejudiciais as prescrições muito rigorosas nos métodos a empregar. Em cada caso de per si, tem que ser sempre ponderado o curso das idéias que têm que ser aplicadas. Sòmente por esta forma se pode conseguir que, contràriamente aos antigos cálculos, se poupem realmente despesas e tempo, sem que, por isso, perigue a segurança da construção.

BIBLIOTECA IST

AOS NOSSOS ASSINANTES

A «Técnica», perante tôdas as dificuldades de ordem económica provenientes de mais um ano de guerra, vê-se na necessidade de apelar, novamente, para a boa vontade dos seus assinantes, na certeza de que todos a saberão compreender e ajudar. É por demais sabido que não nos move qualquer interêsse pessoal, e que apenas um grande desejo nos anima: **«manter, e possìvelmente, melhorar o nível da Revista»**. Essa aspiração tornar-se-á uma realidade, estamos certos, uma vez removidas as dificuldades de ordem económica a que aludimos; e por isso **resolvemos aumentar, se bem que ligeiramente, os diferentes preços da Revista**, que, a partir do presente número (inclusivé) passam a ser os seguintes:

NÚMERO AVULSO: **6$00**

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas...	**16$00**	**30$00**	**58$00**
Colónias	—	**40$00**	**70$00**
Estrangeiro	—	**45$00**	**80$00**

tornando-se indispensável que a importância das assinaturas seja satisfeita à 1.ª apresentação do recibo pelo correio.

Oportunamente apresentaremos aos nossos assinantes a justificação mais pormenorizada do sacrifício que neste momento lhes pedimos.

A DIRECÇÃO DA «TÉCNICA»

Acção do amoníaco e do cloro sôbre os materiais das instalações de cloragem das águas de abastecimento

PELO ENG.º (E. M.) LUÍS VEIGA DA CUNHA

Ao projectar a nova estação de cloragem das águas do Alviela, que abastecem Lisboa, tivemos ocasião e necessidade de estudar a resistência dos materiais das instalações de tratamento, ao ataque dos solutos químicos usados na cloragem das águas de abastecimento.

Neste artigo damos a conhecer os resultados por nós colhidos, na intenção de que possam servir a quem se apresentem problemas análogos.

No tratamento pelas cloraminas quando se empregam o cloro e o amoníaco no estado gasoso, em garrafas de ferro sob pressão e, por conseqüência, na forma anidra, o problema do ataque dos materiais não existe.

Mas a nossa indústria não fornece aquelas garrafas, pelo que o tratamento só é viável, nas circunstâncias presentes, com as soluções dos compostos de cloro e amoníaço. Para as soluções aquosas dos sais de amoníaco é que o problema da escolha do material que melhor resiste à sua acção, se apresenta particularmente difícil.

Os compostos de cloro mais usados são a caporite, a cal clorada e a soda clorada, e dêstes, o último, é hoje de emprêgo quási exclusivo, pela sua pureza e comodidade de emprêgo e porque a indústria nacional o fornece em garrafões de vidro, em solução concentrada a que se dá o nome de extracto de Javel.

Os compostos de amoníaco empregados, quando tem lugar a preamonização da água, no tratamento pelas cloraminas, são o sulfato de amónio e o cloreto de amónio.

Quando se emprega a caporite ou a cal clorada não se pode usar o sulfato de amónio, por se formar na reacção o sulfato de cal, que é insolúvel. Com a água de Javel, obtida por diluïção do extracto de Javel, há liberdade de usar o sulfato ou o cloreto de amónio, mas presentemente, só o cloreto de amónio se encontra no mercado. O sulfato de amónio, de uso mais corrente, é hoje absorvido pelas necessidades agrícolas.

Ficam-nos, assim, para ensaiar ao ataque dos materiais de construção das instalações de tratamento, a água de Javel e o soluto de cloreto de amónio.

Os materiais de que se pode fàcilmente lançar mão e mais correntemente usados, são: o betão, o fibrocimento, a porcelana e grés, a ebonite, a borracha e o vidro.

O betão, ou melhor, o cimento, é atacado lentamente pelo cloro, mas com grande intensidade pelo soluto amoniacal, que o atravessa por porosidade, qualquer que seja a sua espessura. O betão, porém, tem sido o material eleito para construção de depósitos de preparação e recolha dos solutos de cloro, visto que a sua construção é da maior simplicidade, quer nas dimensões quer na forma. O betão deve banir-se em absoluto dos recipientes destinados aos solutos amoniacais.

As tentativas de revestimento interior dos depósitos com materiais cerâmicos, como azulejos e ladrilhos, têem-se mostrado infrutíferas, porque as juntas permitem infiltrações que são a ruína dos revestimentos.

Os revestimentos contínuos, com os indutos habitualmente usados para cobrir o betão, são inúteis em presença dos sais de amónio.

O fibrocimento tem a experiência de anos no tratamento das águas de Lisboa. Examinámos um tubo de fibrocimento, que durante três anos conduziu o soluto de cloreto de amónio, na instalação dos Barbadinhos, e verificámos que a alteração não foi grande.

Com a água de Javel o fibrocimento com-

porta-se bem. Em Sintra utilizam-se há anos depósitos de fibrocimento, de fabrico industrial, para recolha de água de Javel, que se mantêem em perfeito estado de conservação.

O fibrocimento está também indicado para as canalizações dos solutos, desde que se suprimam das juntas as peças de ferro.

A porcelana seria material de escolha para todos os casos, mas o seu elevado custo torna-lhe proïbitivo o emprêgo, além de que não se presta à fabricação de grandes peças, como os depósitos das grandes instalações.

O grés é bom material em presença dos solutos clorados, mas absolutamente impróprio para os solutos amoniacais.

Em Sintra utilizam-se nos depósitos de nível constante, da instalação de tratamento da água que alimenta a vila, recipientes de grés salgado para a água de Javel, que têem provado òptimamente.

Para o cloreto de amónio o grés torna-se poroso, como se observou nas canalizações de condução dêste soluto na instalação da Companhia das Águas de Lisboa (Barbadinhos).

Cabe aqui lembrar que o vidrado de grés não contém sais de chumbo, como o da loiça de barro, mas é constituído por silicatos formados na última fase da cozedura, pela adição de sal comum à fornada. Ao grés vidrado assim obtido, de côr geralmente muito escura, chamam os ceramistas grés salgado.

Também se fabricam peças de grés vidrado a branco, com o aspecto da faiança das loiças sanitárias. Chama-se grés sanitário: as peças de grés são recobertas com vidrado de grande resistência, aplicado sôbre uma camada de pasta cerâmica branca que cobre as peças de grés, prèviamente cozidas.

Estas peças depois de recozidas a alta temperatura são de belo aspecto, resistem bem à acção dos ácidos e ao soluto de cloreto de amónio.

Adquirimos dois vasos, um de grés salgado (Abrigada) e outro de grés sanitário vidrado (Sacavém) e enchemo-los com o soluto de cloreto de amónio, no intuito de verificarmos a maneira como se comportavam.

Com o grés salgado notámos, a partir da terceira semana o aparecimento em quantidade crescente de um depósito branco de sais amoniacais, na face exterior do vaso, correspondendo exactamente à superfície molhada interior.

O recipiente de grés sanitário resiste bem à acção dos sais amoniacais. O preço de fabrico do grés sanitário poderá excluir o seu emprêgo nos grandes depósitos.

O material é aconselhável para pequenos depósitos, até onde as possibilidades orçamentais das instalações o permitam.

O grés salgado está também indicado para as grandes torneiras, onde satisfaz tanto para o cloro, como para o amoníaco.

A ebonite e o vidro são os materiais que melhor provam, mas não podem servir senão em canalizações curtas, torneiras pequenas e outras peças pequenas, pois não é fácil conseguir peças de grandes dimensões de ebonite e as grandes peças de vidro não resistem às variações de temperatura.

A borracha comporta-se razoàvelmente, mas amolece ao fim de certo tempo e acaba por perder a elasticidade e romper-se.

Há que distinguir entre os diferentes tipos de borracha manufacturada que se encontram no comércio: a borracha branca e vermelha são as mais resistentes; a borracha preta usada nos tubos armados com tela, prova mal e os tubos tornam-se ràpidamente porosos para o cloreto de amónio, como verificámos em ensaios experimentais.

A borracha convém às ligações entre tubos e peças que é necessário desligar freqüentemente, e é insubstituível nas ligações elásticas.

Há ainda a considerar a acção do ataque aos metais, pois nos aparelhos das instalações de tratamento, nem sempre é possível eliminar tôdas as peças metálicas.

Isto levou-nos a estudar o ataque do cobre, do latão, do ferro, do aço e do chumbo.

Da série de ensaios que nós próprios fizemos e dos ensaios de confirmação requisitados ao Laboratório de Ensaio e Estudos de Materiais do M. O. P. C. e ao Laboratório do Serviço de Tratamento de Água da Companhia das Águas de Lisboa, podemos concluir: que é grande o ataque ao cobre e às ligas de cobre, designadamente, ao latão, assim como ao ferro fundido; que é menor ao aço de construção e ao aço ordinário, que o aço inoxidável é muito resistente ao

ataque; que o chumbo é muito atacado tanto pelos solutos de amoníaco como pelos de cloro.

Relativamente ao aço inoxidável diz o certificado de 17 de Maio de 1943, do Laboratório Oficial: «Amostra 13391 — aço inoxidável — Após vinte dias de imersãa no soluto de cloreto de amónio (a 5 %) não se nota qualquer indício de ataque na superfície da amostra».

O aço inoxidável resiste pois à acção do cloreto de amónio.

Em última conclusão dêste nosso trabalho podemos escolher para as diferentes partes das instalações, como mais aconselhados, os materiais seguintes:

o betão para os grandes tanques de preparação dos solutos clorados (só necessários nas grandes instalações);

o fibrocimento (de fabrico corrente) para todos os depósitos e para as canalizações de condução dos solutos, tanto para os sais de cloro como para os sais amoniacais;

o grés ordinário salgado com emprêgo nos recipientes de pequenas dimensões que a indústria cerâmica possa fabricar com facilidade, com destino exclusivo aos solutos de cloro; as torneiras de grés, de macho, servem satisfatòriamente, também, para os solutos amoniacais;

o grés sanitário vidrado convém aos solutos de ambas as naturezas, apenas com o inconveniente do elevado preço de custo, principalmente para grandes peças;

a ebonite e o vidro para pequenas torneiras e, duma maneira geral, para os aparelhos de doseamento e suas peças acessórias;

a borracha vulcanizada, de preferência a branca, sem telas, para as ligações flexíveis e vedantes;

o aço inoxidável, finalmente, para as peças cuja construção não é praticável com qualquer dos materiais anteriormente citados tais como parafusos, porcas, eixos (que também podem ser de vidro quando pequenos), anilhas, etc.

Para as canalizações de esgôto de lavagem dos depósitos das instalações, nas grandes estações de tratamento, não tem inconveniente e é económico, o emprêgo de manilhas de grés ordinário, com juntas bem cimentadas.

Devem banir-se das instalações tôdas as peças metálicas de ferro ou latão, mesmo cromadas. Estas, mesmo sem estarem em contacto com os líquidos, são atacadas pelos seus vapores.

É nosso desejo que estas indicações, colhidas no estudo e na observação directa, possam contribuir para a melhoria das poucas instalações de tratamento de água já montadas e sirvam de orientação ao grande número de instalações de que, infelizmente, tanto carece o nosso país.

Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) MANUEL ROCHA

ASSISTENTE DO I. S. T.
BOLSEIRO DO I. A. C.

(Continuação)

17) Conseqüências da lei de Hook

Consideremos um sólido que obedece à lei de Hook, submetido a um sistema de fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_i, \ldots \vec{F}_k, \ldots \vec{F}_n$. Seja:

$$U = f(F_1, F_2, \ldots F_i, \ldots F_k, \ldots F_n)$$

a expressão da energia de deformação elástica em função das grandezas das fôrças aplicadas segundo direcções determinadas.

Suponhamos que as fôrças $\vec{F}_i$ e $\vec{F}_k$ têm a mesma direcção, a mesma grandeza e sentidos contrários (fig. 54). Designemos por d_{ik} a projecção, na direcção destas fôrças, do segmento $P_i P_k$, e por Δd_{ik} a variação desta projecção quando aplicamos ao sólido o sistema de fôrças.

O primeiro teorema de Castigliano afirma que:

$$\frac{\partial f}{\partial F_i} = \delta_i \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial F_k} = \delta_k .$$

Portanto:

$$\Delta d_{ik} = \frac{\partial f}{\partial F_i} + \frac{\partial f}{\partial F_k} .$$

Se na expressão da energia U fizermos $F_k = F_i$, vem:

$$U = \varphi(F_1, F_2, \ldots F_i, \ldots F_n) .$$

É:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial F_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial F_i}\right)_{F_i = F_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial F_k}\right)_{F_i = F_k} .$$

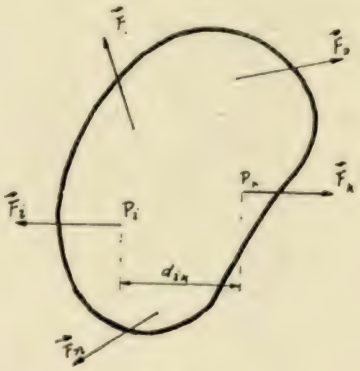


Fig. 54

Logo:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta d_{ik} ,$$

isto é, se exprimirmos U em função da grandeza comum, F_i, das fôrças $\vec{F}_i$ e $\vec{F}_k$, a derivada $\frac{\partial U}{\partial F_i}$ é igual a Δd_{ik}. Já na alínea *d*) do parágrafo 11) tínhamos chegado a esta conclusão no caso particular das fôrças $\vec{F}_i$ e $\vec{F}_k$ terem a direcção do segmento $P_i P_k$.

Suponhamos agora que no sólido, actuam, além de outras fôrças, dois binários de momentos $\vec{M}_i$ e $\vec{M}_k$, o primeiro constituído pelas fôrças $\vec{F}_i$ e $\vec{F}'_i$ perpendiculares a $P_i P'_i$, e o segundo pelas fôrças $\vec{F}_k$ e $\vec{F}'_k$ perpendiculares a $P_k P'_k$ (fig. 55). Se designarmos por U a energia de deformação elástica é:

18) $$U = f(F_1, \ldots M_i, \ldots M_k, \ldots F_n) .$$

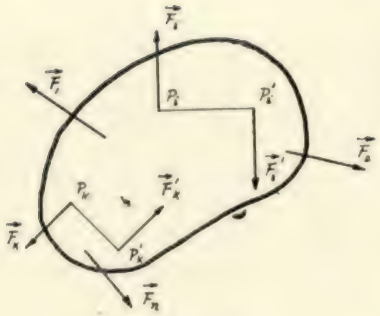


Fig. 55

Vimos que:

$$\frac{\partial f}{\partial M_i} = \theta_i \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial M_k} = \theta_k ,$$

designando por θ_i e θ_k as rotações correspondentes respectivamente aos binários de momentos $\vec{M}_i$ e $\vec{M}_k$.

Suponhamos que os binários existem em planos paralelos. Designemos por $\Delta\theta_{ik}$ a variação do ângulo θ_{ik} que formam entre si as projecções, sôbre o plano dum dos binários, dos segmentos $P_i P'_i$ e $P_k P'_k$. É:

$$\Delta\theta_{ik} = \frac{\partial f}{\partial M_i} + \frac{\partial f}{\partial M_k} .$$

No caso particular, muito importante nas aplicações, dos binários existirem num mesmo plano no qual se mantêm durante a deformação, $\Delta\theta_{ik}$ é igual à variação do ângulo formado pelos segmentos $P_i P'_i$ e $P_k P'_k$.

Tal como anteriormente, se os momentos dos binários tiverem sentidos contrários e a mesma grandeza M_i, é:

$$\Delta\theta_{ik} = \frac{\partial U}{\partial M_i} ,$$

tendo U a expressão que se obtém de 18) fazendo $M_i = M_k$.

18) Estudo das estruturas interiormente hiperestáticas pelo segundo teorema de Castigliano

Consideremos a estrutura plana interiormente hiperestática e exteriormente isostática representada na fig. 56, submetida às cargas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ existentes no plano da estrutura.

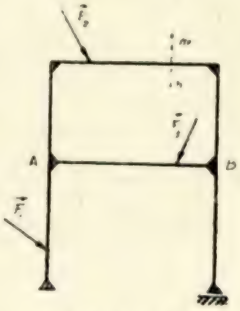


Fig. 56

Se efectuarmos um corte na secção m n obtemos uma estrutura interiormente isostática correspondente à estrutura dada.

Designemos por N, T e M o esfôrço normal, o esfôrço transverso e o momento flector, desconhecidos, desenvolvidos na secção m n da estrutura dada quando aplicamos as cargas. N, T e M são as incógnitas hiperestáticas interiores.

Se aplicarmos as cargas à estrutura isostática correspondente, esta deforma-se e os dois bordos do corte deslocar-se-ão um em relação ao outro. Apliquemos a estes bordos esforços normais, esforços transversos e momentos flectores de valores respectivamente N, T e M, e de sentidos contrários (fig. 57); os valores das incógnitas hiperestáticas N, T e M hão-de ser tais que os dois bordos do corte sejam trazidos à coïncidência.

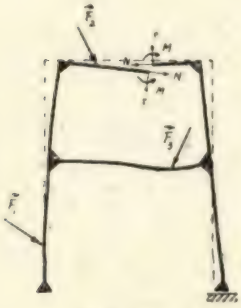


Fig. 57

Vejamos como podemos traduzir analiticamente esta condição.

Designemos por U a energia de deformação elástica da estrutura isostática correspondente. U é função das grandezas das cargas e das incógnitas hiperestáticas:

$$U = f(F_1, F_2, F_3, N, T, M) .$$

Em virtude do exposto na alínea 17), conclui-se que a derivada

$\frac{\partial U}{\partial N}$ é igual à variação da distância, medida paralelamente à normal aos bordos do corte, dos pontos de aplicação dos esforços normais N. Portanto deve ser:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0,$$

pois os dois bordos primitivamente coïncidentes, hão-de continuar coïncidentes após a aplicação de tôdas as fôrças à estrutura.

Semelhantemente deve ser:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0.$$

Estas três equações permitem determinar os valores das três incógnitas hiperestáticas N, T e M. Conhecidos estes valores podemos calcular as tensões desenvolvidas numa secção qualquer da estrutura.

Podíamos ter considerado outras estruturas interiormente isostáticas correspondentes à estrutura dada. Por exemplo a que se obtém efectuando um corte na peça A B (fig. 56), ou a representada na fig. 58 que se obtém da estrutura dada criando uma articulação no nó C e uma ligação do tipo do apoio com articulação e escorregamento na secção D; nesta estrutura da fig. 58 as incógnitas hiperestáticas são N_1, M_1 e M_2.

Dum modo geral consideremos uma estrutura interiormente hiperestática e exteriormente isostática de grau de indeterminação g_i, submetida às cargas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$. Tomemos uma estrutura isostática correspondente e designemos por $V_1, V_2, \ldots V_{g_i}$ as g_i incógnitas hiperestáticas interiores que supomos serem grandezas de fôrças ou de momentos de binários.

Exprimamos a energia de deformação elástica, U, da estrutura isostática correspondente considerada, em função das grandezas das cargas e das incógnitas hiperestáticas:

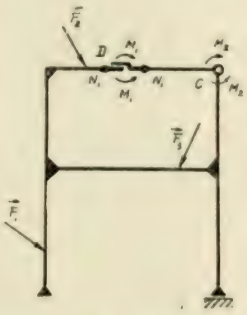


Fig. 58

$$U = f(F_1, F_2, \ldots F_n, V_1, V_2, \ldots V_{g_i}).$$

Os valores das incógnitas hiperestáticas hão-de satisfazer ao sistema de g_i equações:

$$19) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial V_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial U}{\partial V_{g_i}} = 0, \end{cases}$$

que é a expressão analítica do *segundo teorema de Castigliano.* Êste pode ser enunciado do seguinte modo: *se exprimirmos a energia de deformação elástica, U, duma estrutura interiormente hiperestática e exteriormente isostática em função das grandezas das cargas e das incógnitas*

hiperestáticas interiores, os valores destas incógnitas são tais que tornam estacionária a função U; demonstra-se que a tornam mínima.

Podemos encarar o segundo teorema de Castigliano doutro modo.

Ora, como vimos, a distribuïção das tensões elásticas numa estrutura interiormente hiperestática e exteriormente isostática pode exprimir-se *pela estática* em função das cargas e das incógnitas hiperestáticas interiores, isto é, para quaisquer valores que atribuamos a estas incógnitas obtemos uma distribuïção de tensões que satisfaz às equações da estática, quere dizer, distribuïção tal que se considerarmos um trôço qualquer da estrutura êle encontra-se submetido a um sistema de fôrças em equilíbrio. Portanto conclui-se, atendendo ao sistema de equações 19), que *entre a infinidade de deformações correspondentes a distribuïções de tensões satisfazendo às condições de equilíbrio, a deformação real é aquela para a qual a energia de deformação elástica é mínima.* Êste enunciado do segundo teorema de Castigliano é válido para qualquer sólido que satisfaça à lei de Hook.

Para esclarecer êste enunciado consideremos a estrutura plana articulada representada na fig. 59. É interiormente hiperestática de grau de indeterminação $g_i = 1$; tomemos para incógnita hiperestática a tensão T no tirante. As tensões nas restantes barras podem exprimir-se, pela estática, em função de T, isto é, há infinitas distribuïções de tensões para as quais os nós, e portanto qualquer parte da estrutura, são solicitados por fôrças satisfazendo às condições de equilíbrio. Entre as infinitas deformações correspondentes àquelas distribuïções de tensões, a deformação real da estrutura é aquela para a qual a distribuïção das tensões torna mínima a energia de deformação elástica.

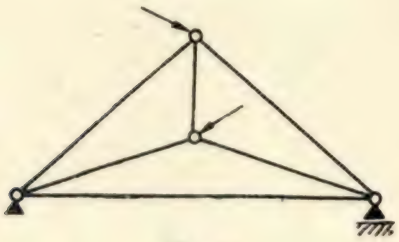


Fig. 59

Consideremos finalmente o caso geral duma estrutura interior e exteriormente hiperestática submetida às cargas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$. Designemos por $R_1, R_2, \ldots R_{g_e}$ as g_e incógnitas hiperestáticas exteriores e por $V_1, V_2, \ldots V_{g_i}$ as g_i incógnitas hiperestáticas interiores. É:

$$U = f\left(F_1, F_2, \ldots F_n, R_1, R_2, \ldots R_{g_e}, V_1, V_2, \ldots V_{g_i}\right).$$

No caso dos apoios não sofrerem assentamentos as $g = g_e + g_i$ incógnitas devem satisfazer ao sistema de g equações:

$$20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial R_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_2} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial R_{g_e}} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial V_2} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial V_{g_i}} = 0. \end{cases}$$

Portanto se exprimirmos a energia de deformação elástica, U, em função das grandezas das cargas e das incógnitas hiperestáticas, os valores destas incógnitas, no caso de não haver assentamentos, são tais que tornam estacionária a função U. Se houver assentamentos os segundos membros das primeiras g_e equações do sistema 20) devem ser substituídos pelos deslocamentos correspondentes a $R_1, R_2, \ldots R_{g_e}$ tal como vimos no parágrafo 14).

Nas estruturas exteriormente hiperestáticas, quer sejam interiormente isostáticas ou hiperestáticas, podem-se tomar em vez das g_e incógnitas hiperestáticas exteriores, g_e variáveis definindo acções exercidas através quaisquer secções. No caso de não haver assentamentos, estas g_e variáveis devem satisfazer ainda aos sistemas de equações 17) ou 20). Assim no caso da estrutura da fig. 60 podemos tomar em vez das incógnitas hiperestáticas exteriores, o esfôrço normal, N, o esfôrço transverso, T, e o momento flector, M, actuantes na secção m n; devem satisfazer ao sistema de equações:

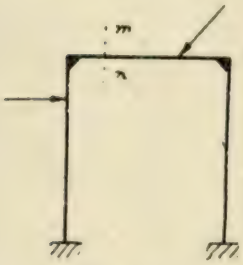


Fig. 60

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial N} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial T} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial M} = 0 . \end{cases}$$

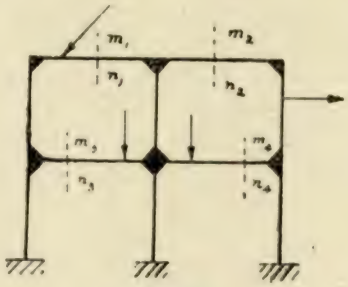


Fig. 61

No caso da estrutura da fig. 61, que é exteriormente hiperestática de grau $g_e = 6$ e interiormente hiperestática de grau $g_i = 6$, podemos tomar para incógnitas hiperestáticas as $3 \times 4 = 12$ variáveis que definem as acções exercidas através das secções $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ e $m_4 n_4$.

19) Aplicações

a) Vamos em primeiro lugar aplicar o segundo teorema de Castigliano ao estudo das estruturas trianguladas, articuladas, planas ou no espaço, interiormente hiperestáticas e exteriormente isostáticas, submetidas a cargas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ actuantes nos nós da estrutura.

Seja g_i o grau de indeterminação interior da estrutura; isto é, se cortarmos g_i barras obtemos uma estrutura interiormente isostática correspondente à estrutura dada. Designemos por $T_1, T_2, \ldots T_{g_i}$ as tensões, desconhecidas, nas barras cortadas; estas tensões são as incógnitas hiperestáticas interiores, que aplicamos nos bordos dos cortes efectuados.

A energia de deformação elástica, U, da estrutura isostática correspondente é uma função das grandezas das cargas e das incógnitas hiperestáticas:

$$U = f\left(F_1, F_2, \ldots F_n, T_1, T_2, \ldots T_{g_i}\right) .$$

A tensão T_k numa barra k qualquer, cortada ou não, pode calcular-se pela estática em função das cargas e das incógnitas hiperestáticas interiores. É, como já vimos na alínea *b*) do parágrafo 11):

$$T_k = T'_k + C_{k1} T_1 + C_{k2} T_2 + \ldots + C_{kg_i} T_{g_i} ,$$

onde T'_k representa a tensão na barra devida às cargas, e $C_{k1}, C_{k2}, \ldots C_{kg_i}$ representam os coeficientes de influência das incógnitas hiperestáticas na tensão T_k.

É:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{L_k T_k^2}{E_k S_k} ,$$

onde m designa o número de barras da estrutura dada, e L_k, E_k, e S_k designam respectivamente o comprimento, o módulo de elasticidade e a área da secção transversal da barra k.

Vem:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{L_k}{E_k S_k} \left(T'_k + C_{k1} T_1 + C_{k2} T_2 + \dots + C_{kg_i} T_g \right)^2 .$$

Os valores das incógnitas hiperestáticas hão-de satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial T_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial T_2} = 0 \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial U}{\partial T_{g_i}} = 0 . \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \dfrac{L_k}{E_k S_k} (T'_k + C_{k1} T_1 + C_{k2} T_2 + \dots + C_{kg_i} T_{g_i}) C_{k1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{m} \dfrac{L_k}{E_k S_k} (T'_k + C_{k1} T_1 + C_{k2} T_2 + \dots + C_{kg_i} T_{g_i}) C_{k2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{m} \dfrac{L_k}{E_k S_k} (T'_k + C_{k1} T_1 + C_{k2} T_2 + \dots + C_{kg_i} T_{g_i}) C_{kg_i} = 0 . \end{cases}$$

Êste sistema de g_i equações lineares permite a determinação dos valores das incógnitas hiperestáticas interiores T_1, T_2,... T_{g_i}, em função dos quais se podem determinar as tensões em tôdas as barras da estrutura dada.

As barras cujas tensões foram tomadas para incógnitas hiperestáticas são designadas superabundantes, porque se as retirarmos ainda se obtém uma estrutura, isto é, um conjunto de peças constituindo um sólido indeformável.

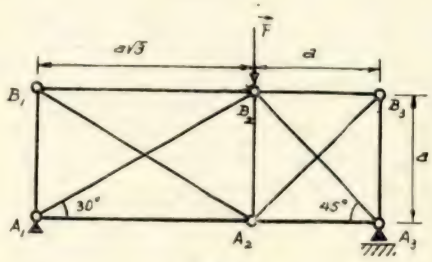


Fig. 62

Com o fim de mostrar a disposição que convém dar aos cálculos, vamos determinar as tensões na estrutura articulada representada na fig. 62, constituída por barras da mesma substância e com a mesma secção.

As reacções dos apoios A_1 e A_3 têm respectivamente os valores:

$$\frac{F}{1+\sqrt{3}} \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F .$$

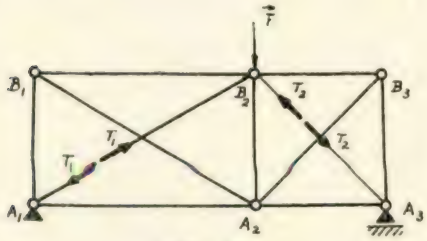


Fig. 63

O grau de indeterminação interior é: $g_i = 2$.

Tomemos para estrutura interiormente isostática correspondente a que se obtém cortando as barras $A_1 B_2$ e $B_2 A_3$. As tensões T_1 e T_2 nestas barras são as incógnitas hiperestáticas; apliquemos (fig. 63) aos bordos dos cortes tensões T_1 e T_2, que supomos serem compressões.

As incógnitas T_1 e T_2 devem satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{11} L_k (T'_k + C_{k1}\, T_1 + C_{k2}\, T_2)\, C_{k1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{11} L_k (T'_k + C_{k1}\, T_1 + C_{k2}\, T_2)\, C_{k2} = 0 \,. \end{cases}$$

Para o cálculo dos primeiros membros destas equações convém organizar o quadro seguinte (1), no qual as tensões de compressão se consideraram positivas e as de tracção negativas:

Barras	Comprimentos L_k	Tensões T'_k	Coeficientes C_{k1}	Coeficientes C_{k2}	Tensões T_k	Valores de $L_k\, T_k\, C_{k1}$	Valores de $L_k\, T_k\, C_{k2}$
$A_1\, A_2$	$\sqrt{3}\, a$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2} T_1$	$\frac{3\sqrt{3}}{4} a\, T_1$	0
$A_1\, B_1$	a	$\frac{F}{1+\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{F}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2} T_1$	$-\frac{a}{2}\left(\frac{F}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2} T_1\right)$	0
$A_1\, B_2$	$2\, a$	0	1	0	T_1	$2\, a\, T_1$	0
$B_1\, B_2$	$\sqrt{3}\, a$	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1$	$-\frac{3a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1\right)$	0
$B_1\, A_2$	$2\, a$	$-\frac{2}{1+\sqrt{3}} F$	1	0	$-\frac{2}{1+\sqrt{3}} F + T_1$	$2\, a\left(-\frac{2}{1+\sqrt{3}} F + T_1\right)$	0
$B_2\, A_2$	a	F	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$F - \frac{1}{2} T_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2$	$-\frac{a}{2}\left(F - \frac{1}{2} T_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} a\left(F - \frac{1}{2} T_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2\right)$
$B_2\, A_3$	$\sqrt{2}\, a$	0	0	1	T_2	0	$a\sqrt{2}\, T_2$
$B_2\, B_3$	a	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} a\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2\right)$
$A_2\, B_3$	$\sqrt{2}\, a$	$-\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} F$	0	1	$-\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} F + T_2$	0	$\sqrt{2}\, a\left(-\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} F + T_2\right)$
$A_2\, A_3$	a	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} T_2$	0	$\frac{1}{2} a\, T_2$
$B_3\, A_3$	a	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} a\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} F - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2\right)$

(1) Os valores de T'_k, C_{k1} e C_{k2} foram obtidos analìticamente. Podiam ter sidos calculados gràficamente.

Donde:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{11} L_k\, T_k\, C_{k1} = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}\, a\, T_1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, a\, T_2 - \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2}\, a\, F \\ \sum_{k=1}^{11} L_k\, T_k\, C_{k2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, a\, T_1 + (2+2\sqrt{2})\, a\, T_2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+2)}{1+\sqrt{3}}\right) a\, F\,. \end{cases}$$

Igualando estas expressões a zero e efectuando as operações, vem:

$$\begin{cases} 7{,}1\ T_1 + 0{,}35\ T_2 = 3{,}1\ F \\ 0{,}35\ T_1 + 4{,}83\ T_2 = 2{,}87\ F\,. \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{cases} T_1 = 0{,}41\ F \\ T_2 = 0{,}56\ F\,. \end{cases}$$

Portanto quando a fôrça $\vec{F}$ fôr dirigida de cima para baixo, as barras superabundantes ficam submetidas a compressões.

As tensões, T_k, nas restantes barras da estrutura obtêm-se a partir das expressões inscritas na antepenúltima coluna do quadro substituindo T_1 e T_2 pelos valores calculados:

$T_{A_1 A_2} = -0{,}35\ F$	$T_{B_2 B_3} = 0{,}23\ F$
$T_{A_1 B_1} = 0{,}16\ F$	$T_{A_2 B_3} = -0{,}33\ F$
$T_{B_1 B_2} = 0{,}28\ F$	$T_{A_2 A_3} = -0{,}4\ F$
$T_{B_1 A_2} = -0{,}32\ F$	$T_{B_3 A_3} = 0{,}23\ F\,.$
$T_{B_2 A_2} = 0{,}4\ F$	

b) Determinemos as tensões elásticas desenvolvidas na viga com tirante e escora representada na fig. 64, submetida a uma carga vertical uniformemente distribuída de intensidade p. Consideremos o caso mais geral da viga ser de substância diferente da do tirante e da escora; por exemplo, a viga de madeira e as outras peças de aço.

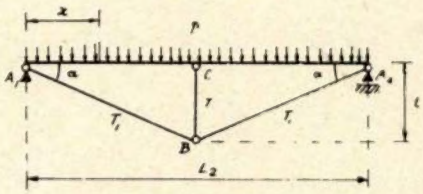


Fig. 64

O grau de indeterminação interior é $g_i = 1$; tomemos a tensão, T, na escora para incógnita hiperestática.

É:

$$U = f\,(p\,,\,T)\,.$$

T deve satisfazer à equação:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 0\,,$$

fornecida pelo segundo teorema de Castigliano.

Calculemos U.

Se designarmos por $U_{A_1BA_2}$, U_{BC} e $U_{A_1A_2}$ as energias de deformação elástica do tirante, da escora e da viga, vem:

$$U = U_{A_1BA_2} + U_{BC} + U_{A_1A_2}\,.$$

Portanto:

$$\frac{\partial U_{A_1BA_2}}{\partial T} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial T} + \frac{\partial T_{A_1A_2}}{\partial T} = 0 .$$

É:

$$U_{A_1BA_2} = \frac{T_1^2 L_1}{2 E_1 S_1} ,$$

designando por L_1 o comprimento do tirante, que está todo submetido à mesma tensão T_1 dada pela expressão:

$$T_1 = \frac{T}{2 \operatorname{sen} \alpha} .$$

Vem:

$$\frac{\partial U_{A_1BA_2}}{\partial T} = \frac{L_1}{4 E_1 S_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} T .$$

A energia da escora tem a expressão:

$$U_{BC} = \frac{T^2 L}{2 E_1 S} ;$$

portanto:

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial T} = \frac{L}{E_1 S} T .$$

Desprezando as energias devidas ao esfôrço normal e ao esfôrço transverso, a energia da viga é dada pela conhecida expressão:

$$U_{A_1A_2} = 2 \int_0^{\frac{L_2}{2}} \frac{M^2}{2 E I} dx .$$

É:

$$\frac{\partial U_{A_1 A_2}}{\partial T} = \frac{2}{E I} \int_0^{\frac{L_2}{2}} M \frac{\partial M}{\partial T} dx .$$

O momento flector M tem a expressão:

$$M = \left(- T_1 \operatorname{sen} \alpha + \frac{p L_2}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2} ;$$

donde:

$$M = \left(- \frac{T}{2} + \frac{p L_2}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2} .$$

Portanto:

$$\frac{\partial M}{\partial T} = - \frac{x}{2} .$$

Vem:

$$\frac{\partial U_{A_1 A_2}}{\partial T} = - \frac{1}{E I} \int_0^{\frac{L_2}{2}} \left[\left(- \frac{T}{2} + \frac{p L_2}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2} \right] x \, dx ,$$

donde:

$$\frac{\partial U_{A_1 A_2}}{\partial T} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{5}{384} p L_2^4 - \frac{T L_2^3}{48}\right).$$

Portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{L_1}{4 E_1 S_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} T + \frac{L}{E_1 S} T + \frac{1}{EI}\left(\frac{T L_2^3}{48} - \frac{5}{384} p L_2^4\right).$$

Igualando a zero e resolvendo a equação, vem:

$$T = \frac{\dfrac{5}{384 EI} p L_2^4}{\dfrac{L_1}{4 E_1 S_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} + \dfrac{L}{E_1 S} + \dfrac{L_2^3}{48 EI}}.$$

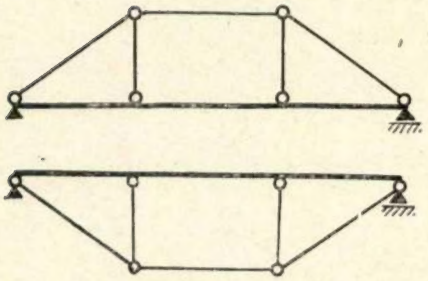


Fig. 65

Conhecido assim o valor de T podemos determinar a tensão T_1 no tirante e o momento flector M numa secção qualquer da viga.

Se a estrutura fôr homogénea é $E = E_1$; então T, T_1 e M não dependem da substância da estrutura.

O estudo das estruturas representadas na fig. 65 faz-se duma maneira semelhante.

e) Estudemos o pórtico representado na fig. 66, submetido a fôrças quaisquer $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$. É uma estrutura exteriormente isostática e interiormente hiperestática de grau de indeterminação $g_i = 3$. Tomemos para estrutura isostática correspondente a que se obtém cortando a barra superior da estrutura dada na secção média B. Há vantagem em tomar esta secção porque daí resultam simplificações nas expressões que vamos obter no caso da estrutura ser simétrica em relação ao plano dessa secção média. As incógnitas hiperestáticas são o esfôrço normal, N, o esfôrço transverso, T, e o momento flector, M, na secção B.

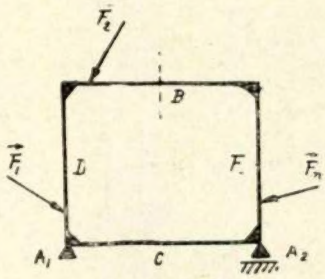


Fig. 66

Apliquemos à estrutura isostática correspondente as cargas dadas e, nos bordos do corte, N, T e M (fig. 67). É:

$$U = \int_{BDC} \frac{M_e^2\, ds}{2 EI} + \int_{BFC} \frac{M_d^2\, ds}{2 EI},$$

onde M_e e M_d designam os momentos flectores numa secção qualquer respectivamente da metade da esquerda, BDC, e da metade da direita, BFC, da estrutura. Designemos por x e y as coordenadas do centro de gravidade duma secção transversal referidas aos eixos representados na fig. 67; x é considerado positivo para a direita de B para as secções da metade da direita da estrutura, e positivo para a esquerda de B para as secções da metade da esquerda. Vem:

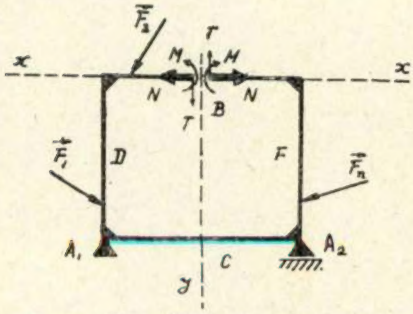


Fig. 67

$$M_e = M'_e + M + Ny - Tx$$
$$M_d = M'_d + M + Ny + Tx,$$

onde M'_e e M'_d designam os momentos flectores devidos às cargas dadas, numa secção das metades da esquerda e da direita, respectivamente.